BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

9
2000

SỐ 279 - NĂM THỨ 37 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

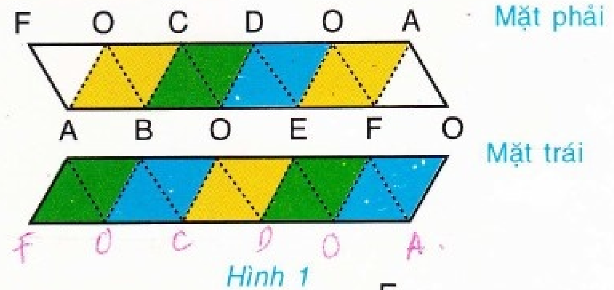


Toán tuổi thơ - Người bạn mới

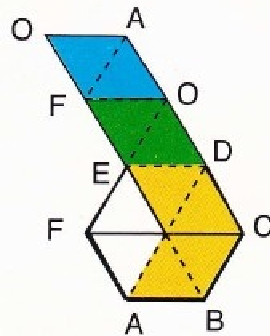
TOÁN HỌC MUÔN MẦU

LỤC GIÁC ĐỔI MÀU

Bạn hãy làm một băng giấy có các nếp gấp (các nét chấm trên hình 1) tạo thành 10 tam giác đều và tô 3 màu.

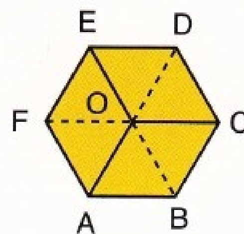


Hình 1

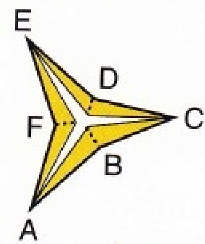


Hình 2

Gấp băng giấy lần lượt theo các đoạn thẳng *BC, DE, FA* (hình 2) rồi dán hai tam giác không có màu vào nhau để được lục giác đều *ABCDEF* có mặt phải toàn màu đỏ, còn mặt trái toàn màu xanh (hình 3 : các điểm cùng chữ gần trùng nhau, các nét đứt chỉ đường khuất). Đẩy các đỉnh *B, D, F* xuống dưới vào phía trong (mũi tên ở hình 4) để chúng gần trùng nhau, rồi từ đỉnh *O* mở đồng thời các cặp tam giác có chung đường gấp khúc *AOC, COE, EOA* ra phía ngoài, ta lại được lục giác đều nhưng có 1 mặt đã đổi màu. Luyện nhanh tay, bạn có thể biểu diễn trò ảo thuật *Lục giác đổi màu*.



Hình 3



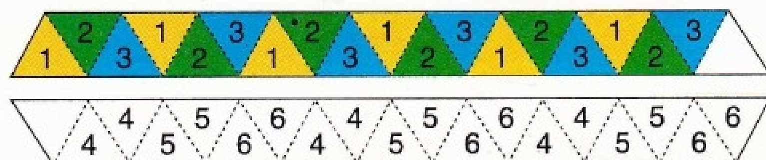
Hình 4

Mẫu hình này có tên là Hêcxaphlêxagôn (hexaflexagon) xuất phát từ tiếng Hylạp : *hex* là sáu, *flex* là gập, từ đuôi *gon* chỉ đa giác. Trò chơi này do một nghiên cứu sinh toán người Anh là Acthơ X. Stôun, học tại trường Đại học Mỹ Princitơn, tìm ra năm 1939, sau đó lập *Hội Phlêxagôn* để nghiên cứu cách đổi màu của các hình phức tạp hơn.

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

1) Làm một băng giấy có các nếp gấp tạo thành 19 tam giác đều và tô sáu màu (kí hiệu màu 1, 2, 3, 4, 5, 6) như hình 5. Gấp băng giấy này theo nếp gấp kiểu xoắn ốc sao cho mặt phải đều nằm phía ngoài để được băng 2 lớp như hình 1, sau đó gấp thành hình lục giác đều như hình 2 sao cho một mặt toàn màu số 2, còn mặt kia toàn màu số 3.

2) Bạn hãy làm ảo thuật biến đổi lục giác vừa làm để xuất hiện một mặt toàn màu số 1 ? toàn màu số 4 ? màu số 5 ? màu số 6 ? Hãy chỉ ra cách biến đổi như thế.



Hình 5

Năm phần thưởng dành cho các bạn biến đổi được nhiều màu nhất.

PHI PHI

(Xem tiếp trang 13)

Năm thứ 37
Số 279 (9–2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

TRONG SỐ NÀY



Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIẢI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC DƯỚI CÁCH NHÌN ĐẠI SỐ

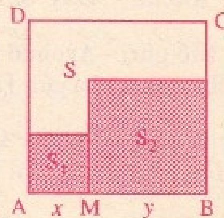
HỒ CÔNG DŨNG
(GV trường THPT chuyên Bình Thuận)

SÁNG tạo các bài toán là việc làm cần thiết của người học toán. Qua bài viết này, xin được trao đổi về vài bài toán cực trị hình học được nhìn từ bài toán cực trị đại số.

Trước hết ta xét vài ví dụ sau :

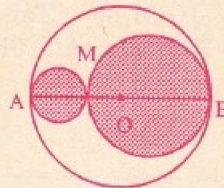
Bài toán 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là điểm di động trên cạnh AB. Dựng các hình vuông có cạnh MA, MB về bên trong $ABCD$. Xác định vị trí của M để diện tích phần còn lại S của hình vuông $ABCD$ là lớn nhất.

Lời giải. Đặt $MA=x$, $MB = y$ với $x, y \geq 0$ thỏa mãn $x+y = a$. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hình vuông cạnh MA và MB thì $S_1 = x^2$ và $S_2 = y^2$. Dễ thấy S lớn nhất $\Leftrightarrow$ $S_1 + S_2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow P = x^2 + y^2$ nhỏ nhất. Từ bất đẳng thức $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 = a^2$ suy ra giá trị nhỏ nhất (GTNN) của $S_1 + S_2$ bằng $\dfrac{a^2}{2}$, lúc đó M là trung điểm AB.



Bài toán 2. Cho đường tròn (O, R). M là điểm di động trên đường kính AB. Xác định vị trí của M để tổng diện tích các hình tròn có đường kính MA và MB là nhỏ nhất.

Lời giải. Đặt $MA=2x$, $MB = 2y$ với $x+y \geq 0$ thỏa $x+y = R$ (không đổi). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hình tròn có đường kính MA và MB. Dễ thấy $S = S_1 + S_2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $P = \pi x^2 + \pi y^2 = \pi(x^2 + y^2)$ nhỏ nhất. Lập luận tương tự như trên suy ra GTNN của S bằng $\dfrac{\pi R^2}{2}$, lúc đó M trùng với tâm O.



Lời giải các bài toán trên đều dẫn đến việc xét giá trị nhỏ nhất của biểu thức dạng x^2+y^2 hoặc x^3+y^3.... trong đó $x+y$ là hằng số. Như vậy việc giải các bài toán cực trị hình học có thể chuyển về giải bài toán cực trị đại số.

Ta xét bài toán cực trị đại số tổng quát hơn.

Bài toán đại số : *Xét n số không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn : $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$ với a là số dương cho trước.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $P = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$

b) $Q = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3$

Lời giải. a) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$$(x_1+x_2+...+x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq \frac{a^2}{n} \qquad (1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi : $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Vậy GTNN của P là $\dfrac{a^2}{n}$ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = \dfrac{a}{n}$.

b) Đặt $\sqrt{x_i} = t_i \geq 0$ với $i = 1, 2, ..., n$ thì $x_i = t_i^2$ và $x_i^2 = t_i t_i^3$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$$(t_1t_1^3 + t_2t_2^3 + ... + t_nt_n^3)^2$$
$$\leq (t_1^2 + t_2^2 + ... + t_n^2)(t_1^6 + t_2^6 + ... + t_n^6) \text{ hay}$$
$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^2 \leq a(x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3) \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $a(x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3) \geq \frac{a^4}{n^2}$

$\Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 \geq \frac{a^3}{n^2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi (1) và (2) cùng xảy ra dấu đẳng thức, khi đó : $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Vậy GTNN của Q là $\frac{a^3}{n^2}$ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{a}{n}$.

Bài toán 3. Cho đường tròn tâm O. Góc $\angle xMy = \alpha$ không đổi ($90^o < \alpha < 180^o$) quay quanh điểm M cố định trên đường tròn. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M lên dây cung nối 2 giao điểm của Mx, My với đường tròn. Hãy xác định vị trí góc xMy sao cho giá trị $IA^3 + IB^3$ là nhỏ nhất.

Lời giải. Giả sử Mx và My cắt đường tròn lần lượt ở A và B. Vì $\angle AMB = \alpha$ không đổi nên độ dài AB bằng hằng số a, từ đó $IA+IB= a$. Áp dụng kết quả bài toán đại số thì giá trị $IA^3 + IB^3$ là nhỏ nhất khi độ dài $IA = IB = \frac{a}{2}$, lúc đó góc xMy nhận MO là đường phân giác.

Bài toán 4. Chia đoạn thẳng AB cho trước bởi các điểm chia theo thứ tự $A = M_1, M_2, ..., M_{n+1} = B$. Gọi $S_1, S_2, ..., S_n$ là diện tích của n hình vuông có các cạnh lần lượt là $M_1M_2, M_2M_3, ..., M_nM_{n+1}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$.

Bài toán 5. Chia đường kính AB của đường tròn (O, R) cho trước lần lượt thành n đoạn $x_1, x_2, ..., x_n$ chỉ chung nhau điểm đầu mút sao cho $x_1+x_2 + ... + x_n = AB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích n hình tròn có đường kính là các đoạn $x_1, x_2, ..., x_n$.

Bài toán 6. Xét n hình lập phương với các cạnh $x_1, x_2, ..., x_n$ sao cho tổng $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$ dương không đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng thể tích của chúng.

Bài toán 7. Xét n hình cầu với các bán kính $r_1, r_2, ..., r_n$ sao cho tổng $r_1 + r_2 + ... + r_n = k$ dương không đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các diện tích và của tổng các thể tích của chúng.

Hi vọng rằng giải bài toán bằng các cách nhìn khác nhau, các bạn sẽ sáng tạo nhiều bài toán hay hơn, hấp dẫn hơn.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 33

Problem. Let *ABC... E* be a regular polygon of unit side 1. Consider the triangles at *A* that are determined by *BE* and the diagonals at *A*. Then, for each of these triangles, the length of one of the sides on *BC* is equal to the product of the lengths of the other two sides.

Solution. Let *AMN* and *APN* be two adjacent triangles, having sides of the lengthes *a, b, c, x, y*, as marked in the figure. Now, the vertices of a regular polygon lie on a circle, and in this circumcircle the angles *MAN* and *NAP* are subtended by equal sides of the polygon. Thus, these angles are equal. Therefore, *AN* bisects angle *MAP* and we get

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{c}.$$

From this it follows that

$$\frac{ab}{x} = \frac{bc}{y}$$

Now, denote by *Q* the point of intersection of *AC* and *BE*. By symmetry we have $\angle ABQ = \angle BAQ$, making $AQ = BQ$. From the above formula we can deduce that $\frac{ab}{x} = \frac{AB.AQ}{BQ} = AB = 1$.

So we have in general that x = ab.

Từ mới :

regular	= đều, chính quy (tính từ)
polygon	= đa giác
unit	= đơn vị
triangle	= tam giác
determine	= xác định
diagonal	= đường chéo
side	= cạnh, vế
adjacent	= kề, bên cạnh (tính từ)
mark	= đánh dấu
figure	= hình vẽ, hình dạng
vertex	= đỉnh
circumcircle	= đường tròn ngoại tiếp,
angle	= góc
subtend	= trương, chắn
bisect	= chia đôi
point of intersection	= giao điểm
symmetry	= tính đối xứng
formula	= công thức
deduce	= suy ra, suy luận (động từ)
in general	= nói chung, thông thường

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN VÀO ĐH XÂY DỰNG VÀ ĐH LUẬT HÀ NỘI NĂM 2000

CÂU I. cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 1}$.

1. Tìm tập xác định và xét sự biến thiên của $f(x)$;

2. Tìm các tiệm cận, điểm uốn và xét tính lồi lõm của đồ thị $f(x)$;

3. Chứng minh rằng đạo hàm cấp n của $f(x)$ bằng $(-1)^n n!\left(\dfrac{2^{n-1}}{(2x-1)^{n+1}} - \dfrac{2}{(x+1)^{n+1}}\right)$.

CÂU II.

1. A (PTTH chưa PB) Giải bất phương trình

$$\frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)}{x+1} > 0 ;$$

B. (THCB) Giải bất phương trình

$$\frac{\lg\dfrac{5+x}{5-x}}{2^x - 3x + 1} < 0 ;$$

2. Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{1-\sin 2x} + \sqrt{1+\sin 2x}}{\sin x} = 4\cos x.$$

CÂU III. 1. Tính $\displaystyle\int_0^1 \frac{3dx}{1+x^3}$;

2. Chứng minh rằng với 2 số tự nhiên m, n khác nhau :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx.\sin nx dx = 0.$$

CÂU IV.

1. Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$;

b) Nếu $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$, thì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

2. Cho 4 điểm $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $C(1; 2; 1)$, $D(2; -1; 2)$ trong hệ tọa độ Đềcác trực chuẩn $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm : C, D và tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $ABCD$.

3. *A.* (PTTH chưa PB) Tìm tập hợp các điểm $M(x, y)$ trong hệ tọa độ Đềcác trực chuẩn Oxy, sao cho khoảng cách từ M đến điểm $F(0; 4)$ bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = 1$. Tập hợp đó là đường gì ?

B. (THCB) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, có chiều cao bằng h và 2 đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tìm thể tích lăng trụ đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. 1. Hàm xác định với những x khác -1 và 0,5.

$$f'(x) = \frac{7x^2 - 10x + 1}{(2x^2 + x - 1)^2} ; f'(x) = 0$$

tại $x_1 = \dfrac{5 - 3\sqrt{2}}{7}$ và $x_2 = \dfrac{5 + 3\sqrt{2}}{7}$.

Hàm $f(x)$ đồng biến trong các khoảng $(-\infty; -1)$; $(-1; x_1)$; $(x_2; +\infty)$ và nghịch biến trong các khoảng $(x_1; 0{,}5)$; $(0{,}5; x_2)$; đạt cực đại tại x_1, cực tiểu tại x_2.

2. Tiệm cận đứng : $x = -1$ và $x = 0{,}5$; tiệm cận ngang : $y = 0{,}5$. $f''(x) = \dfrac{4(-7x^3 + 15x^2 - 3x + 2)}{(2x^2 + x - 1)^3}$;

$f''(x) = 0$ tại $x = 2$. Đồ thị $y = f(x)$ lồi lên trên trong các khoảng $(-1; 0{,}5)$; $(2; +\infty)$ và lõm (lồi xuống dưới) trong các khoảng $(-\infty; -1)$; $(0{,}5; 2)$ tọa độ điểm uốn : $(2; 0)$.

3. Với $n = 1$ có : $(-1)^1.1!\left(\dfrac{2^o}{(2x-1)^2} - \dfrac{2}{(x+1)^2}\right) =$

$$\frac{-(x+1)^2 + 2(2x-1)^2}{((2x-1)(x+1))^2} = \frac{7x^2 - 10x + 1}{(2x^2 + x - 1)^2} = f'(x).$$

Vậy công thức đúng với $n = 1$. Giả sử công thức đúng với n, tức là có đạo hàm cấp n bằng : $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\left(\dfrac{2^{n-1}}{(2x-1)^{n+1}} - \dfrac{2}{(x+1)^{n+1}}\right)$. Khi đó đạo hàm một lần nữa được :

$f^{(n+1)}(x)$

$$= (-1)^n n!\left(\frac{2^{n-1}.(-2).(n+1)}{(2x-1)^{n+2}} - \frac{2(-1).(n+1)}{(x+1)^{n+2}}\right)$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1)!\left(\frac{2^n}{(2x-1)^{n+2}} - \frac{2}{(x+1)^{n+2}}\right).$$

Chứng minh xong.

Câu II. 1. A. Tử thức : arctg(tg$x$) là hàm tuần hoàn chu kì π. Tử thức dương khi x trong khoảng $(n\pi\ ;\ n\pi+(\pi/2))$; âm khi x trong khoảng $(n\pi - (\pi/2)\ ;\ n\pi)$ với n nguyên. Mẫu thức dương khi $x > -1$ và âm khi $x < -1$. Kết hợp lại : nghiệm của bất phương trình là

$$\bigcup_{n=0}^{-\infty} (n\pi - (\pi/2)\ ;\ n\pi) \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty} (n\pi\ ;\ n\pi + (\pi/2)) \cup (-\pi/2; -1).$$

B. Tập xác định : $-5 < x < 5$. Tử thức : $lg\dfrac{5+x}{5-x}$ dương khi $0 < x < 5$; âm khi $-5 < x < 0$.

Mẫu thức có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 3$; đạo hàm của mẫu thức là 2^x . ln 2-3, từ đó suy ra dấu của mẫu thức : dương trong hai khoảng $(-5; 1)$ và $(3; 5)$; âm trong khoảng $(1; 3)$. Nghiệm của bất phương trình gồm hai khoảng $(-5; 0)$ và $(1; 3)$.

2. Phương trình tương đương với

$|\cos x - \sin x| + |\cos x + \sin x| = 4\sin x.\cos x$ với x khác $k\pi$ (k nguyên)

$\Leftrightarrow 1 + |\cos 2x| = 2\sin^2 2x$ với $\sin 2x > 0$

$\Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0$ với $t = |\cos 2x|$ và $\sin 2x > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x = \pm 1/2 \\ \sin 2x > 0\end{cases} \Leftrightarrow x = (\pi/6) + k\pi$ hoặc $x = (\pi/3) + k\pi$ (k nguyên).

CÂU III. 1.

$$\int_0^1 \frac{3dx}{1+x^3} = \int_0^1 \frac{(x^2-x+1)-(x^2-x-2)}{1+x^3}dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$= \ln(x+1)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \sqrt{3}\int_0^1 \frac{d\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)\Big|_0^1 + \sqrt{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{d(tgt)}{(tgt)^2+1}$$

$$= \ln 2 + \sqrt{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} dt = \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

2. Dùng công thức lượng giác biến tích thành tổng ; từ đó chứng minh được mỗi tích phân bằng 0.

CÂU IV.

1. a) $AD^2 + BC^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2$
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})^2 + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 =$
$= AB^2 + BD^2 + BA^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CA} =$
$= BD^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\,.\,(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$
$= BD^2 + AC^2 + 2\,\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{CD}$

Từ đó suy ra : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{CD} = 0$
$\Leftrightarrow AD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2$

b) Áp dụng câu a).

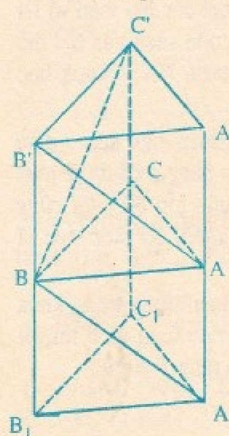
2. Phương trình mặt phẳng (ACD) là $x-z = 0$; phương trình mặt phẳng (BCD) là $5x+3y+4z = 15$; mặt phẳng qua 3 điểm C, D và tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp là một trong 2 mặt phẳng phân giác (P), (Q) của nhị diện CD. Từ công thức khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng có phương trình 2 mặt phẳng đó là : (P) : $3y+9z = 15$ và

(Q) : $10x+3y-z = 15$.

Mặt phẳng (Q) cắt đường thẳng AB ở điểm E (1,5; 0; 0). Vì E nằm trong đoạn AB nên (Q) là mặt phẳng phải tìm ((Q) đi qua tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp).

3. A. Khoảng cách từ điểm $M(x, y)$ đến điểm $F(0; 2)$ là : $\sqrt{x^2 + (y-4)^2}$ và đến đường thẳng Δ là : $|y-1|$. Vậy tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình : $4.(y-1)^2 = x^2 + (y-4)^2$. Do đó tập hợp các điểm M là đường hypebol : $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{12} = 1$.

B. Kéo dài hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thêm một lăng trụ $A_1B_1C_1.ABC$ bằng lăng trụ đã cho. Khi đó tam giác A_1BC' vuông tại B. Giả sử cạnh đáy lăng trụ bằng a. Ta có :



Trong tam giác ABB' :
$AB'^2 = a^2 + h^2$;

Trong tam giác A_1BC' :
$2A_1B^2 = a^2 + (2h)^2$, do đó $a^2 = 2h^2$.

Thể tích lăng trụ bằng : $\dfrac{h^3\sqrt{3}}{2}$.

DOÃN TAM HÒE
(Trường ĐH Xây dựng Hà Nội)

BẢY BÀI TOÁN CỦA THIÊN NIÊN KỈ

HÀ HUY KHOÁI
(*Viện Toán học*)

Trong phiên họp ngày 24/5/2000 tại Paris, Viện Toán học Clêi (Clay) ở Kembritgiơ (Cambridge) (Massachusetts, Mỹ) công bố "Bảy bài toán của thiên niên kỉ" và lập một Quỹ gồm bảy triệu đôla Mỹ để thưởng cho những người giải được bảy bài toán đó (mỗi bài một triệu). Để giúp bạn đọc báo Toán học Tuổi trẻ hiểu thêm những vấn đề toán học của thiên niên kỉ mới, tôi xin giới thiệu vắn tắt nội dung của bảy bài toán. Phải nói ngay rằng, các bài toán đều thuộc những lĩnh vực hiện đại của toán học, để hiểu được chúng, cần phải có những kiến thức rất sâu và phong phú về nhiều ngành khác nhau của toán học hiện đại. Vì thế, bài viết nhỏ này chỉ có thể giới thiệu hết sức sơ lược những ý tưởng chính của các bài toán.

1. *P = NP* HAY *P ≠ NP*

Xin bạn chớ vội vàng "giản ước" P ở hai vế! Đó chỉ là cách viết một bài toán nổi tiếng đặt ra bởi Stêphen Cuc (Stephen Cook) năm 1971. Ta thử hình dung lấy hai số nguyên tố đủ lớn (khoảng 100 chữ số) rồi nhân với nhau. Với một máy tính điện tử, các bạn làm bài toán đó không lâu lắm. Bài toán nói trên thuộc lớp những bài toán mà tồn tại một thuật toán để giải nó với thời gian là một *đa thức* của đầu vào (input). Ta kí hiệu **P** là lớp các bài toán như vậy. Bây giờ, các bạn thử giữ bí mật hai số đã dùng để nhân với nhau và công bố tích của chúng. Khi đó, với máy tính điện tử và những thuật toán đã biết, người ta có thể phải mất hàng tỉ năm mới tìm lại được hai số ban đầu! Như vậy, bài toán phân tích một số nguyên ra thừa số nguyên tố không thuộc lớp **P**. Nguyên nhân của điều đó là, thuật toán *xác định một số có phải là nguyên tố hay không bằng cách dùng sàng Ơratôtxten* không thuộc lớp **P** (ta sẽ còn trở lại điều này trong một số bài toán sau). Tuy nhiên, có những *thuật toán xác suất* (thuật toán không tất định) làm được việc đó với thời gian đa thức (các bạn có thể tìm hiểu thêm về vấn đề này, và về các bài toán số III và VII sẽ trình bày sau đây, trong cuốn sách của tác giả bài này : *Nhập môn số học thuật toán*, NXB Khoa học 1997).

Bài toán **P** và **NP** có thể phát biểu như sau : *phải chăng một bài toán có thể giải được bằng một thuật toán không tất định đa thức* (bài toán thuộc lớp **NP**) *thì cũng giải được bằng một thuật toán (tất định) đa thức* (tức là cũng thuộc lớp **P**) ?

Bài toán trên có vai trò hết sức quan trọng trong khoa học máy tính, lí thuyết độ phức tạp tính toán và lí thuyết mật mã. Hầu hết các nhà toán học tin rằng *P ≠ NP*.

II. GIẢ THUYẾT POINCARÉ

Ta thử lấy một quả cầu và vẽ trên đó một đường cong. Dù đường cong đã vẽ thế nào thì ta cũng có thể "nén liên tục" (không làm đường cong bị đứt) cho đến khi nó chỉ còn là một điểm (trong suốt quá trình nén, đường cong luôn nằm trên mặt cầu). Với đường cong vẽ trên chiếc nhẫn (hình xuyến) thì không phải bao giờ cũng làm được điều đó. Chẳng hạn, không thể nén liên tục một đường cong chạy bao quanh chiếc nhẫn thành một điểm. Ta nói rằng, mặt cầu *đơn liên*, còn mặt xuyến thì *không đơn liên*.

Năm 1904 Hăngri Poăngcarê (Henri Poincaré) phát biểu giả thuyết sau đây : *mọi đa tạp ba chiều* (ta tạm hiểu đa tạp 3 chiều là một khối hình học trơn, tức là không gồ ghề, trong không gian 3 chiều) *đơn liên compăc và không có biên, đều đồng phôi với mặt cầu ba chiều* (tức là có thể ánh xạ một đối một liên tục hai chiều đa tạp đó lên mặt cầu ba chiều).

Bài toán trên được rất nhiều nhà toán học lớn quan tâm, trong đó có nhiều người đã từng được Giải thưởng Phin (Fields) (tương tự như giải Nôben (Nobel), nhưng giành cho các nhà toán học) như S. Smên (S. Smale), W.P. Thơcstơn (W.P. Thurston), S.Nôvicôp (S. Novikov). Tuy nhiên, cho đến nay, họ chỉ giải được bài toán trong không gian với chiều từ 4 trở lên. Thế mới hay, các bài toán đặt cho không gian 3 chiều mà chúng ta đang sống vẫn là khó nhất !

III. GIẢ THUYẾT RIEMANN

Toàn tập công trình của nhà toán học Đức Rioman (B. Riemann 1826-1866) in thành một cuốn sách chỉ dày khoảng gần 400 trang. Vậy mà tên của ông được nhắc đến hầu như trong mọi ngành của toán học hiện đại. *Giả thuyết Riemann* được xem là một trong những bài toán lớn nhất của toán học. Trước hết ta xét *Hàm zêta Riemann* định nghĩa bởi đẳng thức sau đây :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Dễ thấy rằng, chuỗi nói trên hội tụ với các số phức s có phần thực lớn hơn 1. Như vậy, hàm zêta Riemann xác định trên nửa mặt phẳng nằm bên phải đường thẳng Re(s) = 1 (Re là kí hiệu phần thực của số phức). Sau đó nhờ phương trình hàm mà hàm zêta Riemann thỏa mãn, ta xác định được nó trên toàn mặt phẳng phức (trừ tại $s = 1$, và hàm có giới hạn vô cùng khi s dần đến 1). Có thể chứng minh rằng, hàm zêta Riemann bằng 0 tại các giá trị $s = -2k$ (với mọi k nguyên dương).

Giả thuyết Riemann nói rằng, *ngoài các điểm đó ra, mọi điểm khác tại đó hàm zêta Riemann bằng 0 đều có phần thực bằng 1/2*. Nói cách khác, mọi *không điểm* khác của hàm zêta Riemann đều nằm trên đường thẳng

Re(s) = 1/2. Bằng máy tính, người ta đã kiểm tra được là giả thuyết đúng đối với 1.500.000.000 (một tỉ rưỡi) *không điểm* của hàm zêta ! Tuy nhiên, giả thuyết trên vẫn là một thách thức cho toán học của thiên niên kỉ mới.

Có lẽ cũng cần giải thích đôi điều để các bạn hình dung được tại sao hàm zêta Riemann lại quan trọng như thế đối với toán học. Không khó khăn gì, ta chứng minh được đẳng thức sau đây, gọi là *tích Ole* (Euler) (các bạn hãy tự làm như là bài tập) :

$$\zeta(s) = \Pi \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

trong đó tích được lấy trên tập hợp mọi số nguyên tố *p*. Chính vì công thức trên mà hàm zêta Riemann tìm thấy rất nhiều ứng dụng khác nhau trong lí thuyết số. Chẳng hạn, dùng hàm zêta Riemann người ta chứng minh được Định lí Đirichlê (Dirichlet) về sự tồn tại vô hạn số nguyên tố trong cấp số cộng mà số hạng đầu và công sai nguyên tố cùng nhau. Nếu giả thuyết Riemann là đúng, ta sẽ có công thức khá chính xác để mô tả luật phân bố số nguyên tố, và từ đó đánh giá được thời gian (độ phức tạp) của thuật toán phân tích số nguyên ra thừa số nguyên tố. Như đã nói trong phần giới thiệu bài toán I, điều này rất quan trọng trong lí thuyết và ứng dụng.

IV. LÍ THUYẾT YANG-MILLS

Nếu như trong thế giới vĩ mô có các định luật Niutơn (Newton) của cơ học cổ điển thì trong thế giới các hạt cơ bản (thế giới vi mô) có tác động của các định luật của vật lí lượng tử. Cách đây gần nửa thế kỉ, hai nhà toán học Yâng (Yang) và Min (Mills) phát hiện ra rằng vật lí lượng tử chứa đựng mối quan hệ hết sức chặt chẽ giữa vật lí các hạt cơ bản và toán học của một số đối tượng hình học (các phân thớ,...). Họ đưa ra phương trình nổi tiếng dưới tên gọi Phương trình Yang-Mills, nhờ đó tiên đoán được nhiều hiện tượng trong vật lí các hạt cơ bản. Nhiều tiên đoán trong số đó đã được chứng minh bằng thực nghiệm tại các phòng thí nghiệm về vật lí năng lượng cao ở Anh, Mỹ, Pháp, Nhật... Tuy nhiên, cho đến nay, người ta chưa tìm được cách giải phương trình Yang-Mills sao cho thỏa mãn được hai điều kiện : vừa bảo đảm tính chính xác toán học, vừa mô tả được các hạt có khối lượng (hạt nặng). Đây không phải là lần đầu tiên mà một lí thuyết chưa thật "chặt chẽ" về toán học lại có ứng dụng trong vật lí. Đặc biệt, các nhà vật lí thường dùng giả thiết "khe khối lượng" để giải thích sự "không nhìn thấy được" của các hạt *quắc* (quarks). Điểm đặc biệt của các hạt "quarks" là khi chúng càng xa nhau, lực tương tác giữa chúng càng mạnh, và cho đến nay, người ta chưa thể tạo ra đủ năng lượng cần thiết để tách chúng rời nhau (như vậy, các hạt "quarks" luôn ở rất gần nhau, và các nhà vật lí gọi là "hạt quarks cầm tù"). Những hiện tượng vật lí này chưa có được sự mô tả chính xác toán học. Để đạt được tiến bộ nào đó trong vấn đề này, có lẽ phải cần đến những tư tưởng mới cả trong toán học và vật lí.

V. GIẢ THUYẾT HODGE

Để nghiên cứu một đối tượng hình học phức tạp, ngay từ thế kỉ 19 người ta đã biết cách làm như sau : "dán" thêm vào nó một hình đơn giản để thu được một đối tượng hình học dễ khảo sát hơn hình ban đầu. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, để thu được một đối tượng hình học đơn giản đến mức ta có công cụ nghiên cứu chúng, những đối tượng phải dùng để dán lại quá phức tạp ! Giả thuyết Hotgiơ (Hodge) nói rằng, trong một số trường hợp rất quan trọng của toán học, các đối tượng dùng để dán có thể được biểu diễn qua các đối tượng khá đơn giản. Có thể nói chi tiết hơn một chút như sau.

Xét các bộ n+1 số $(x_1, ..., x_{n+1})$ thỏa mãn hệ phương trình $P_k(t_1, ..., t_{n+1}) = 0$, $k = 1, ..., m$, trong đó P_k là các đa thức thuần nhất, tức là các đa thức mà mỗi đơn thức của nó có bậc như nhau. Tập hợp các nghiệm của hệ phương trình như vậy lập thành một *đa tạp đại số xạ ảnh trong không gian xạ ảnh n chiều*, nếu đa tạp đại số đó "khá trơn tru" thì ta nói nó là đa tạp *không kì dị*. Để nghiên cứu các đa tạp đại số xạ ảnh, ta thường dùng các *chu trình Hodge* để "dán". Các chu trình Hodge được thể hiện qua một đối tượng mà ta gọi là phần tử của nhóm đối đồng điều hệ số hữu tỉ.

Giả thuyết Hodge nói rằng, *trên các đa tạp đại số xạ ảnh không kì dị, mỗi chu trình Hodge là tổ hợp tuyến tính của các chu trình đại số* (thể hiện qua phần tử của nhóm đối đồng điều hệ số nguyên, tức là các đối tượng đơn giản hơn chu trình Hodge).

VI. SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH TRƠN CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKS

Phương trình Naviê-Stôcơ (Navier-Stokes) là phương trình vi phân đạo hàm riêng dùng để mô tả hiện tượng sống. Chẳng hạn, dùng phương trình đó, ta có thể mô tả được chuyển động của nước bao quanh một con tàu đang chạy, chuyển động của luồng khí bao quanh một máy bay đang bay. Phương trình đó được viết như sau (với các bạn đang học phổ thông, chưa làm quen với đạo hàm riêng thì có thể hiểu kí hiệu ∂ dùng để chỉ việc lấy đạo hàm của một hàm nhiều biến theo một biến nào đó, khi xem các biến khác là cố định):

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x, t) \ (x \in R^n, t > 0) \qquad (1)$$

$$div\, u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \ (x \in R^n, t > 0) \qquad (2)$$

Mặc dù phương trình Navier-Stokes đã được biết đến từ thế kỉ XIX, cho đến nay, hiểu biết của con người về phương trình này vẫn còn rất hạn chế. Trong trường hợp hai chiều ($n = 2$), người ta đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm trơn (tức là có thể lấy đạo hàm) của phương trình Navier-Stokes. Tuy nhiên, trong trường hợp 3 chiều, sự tồn tại nghiệm như vậy vẫn còn là vấn đề mở, ngay cả trong trường hợp đơn giản ($\nu = 0$) (phương trình Euler). Các bạn thấy đấy, cái khó nhất vẫn lại nằm trong không gian 3 chiều !

VII. GIẢ THUYẾT BIRCH VÀ SWINNERTON-DYER

Các bạn có thể xem các điểm của đường parabôn $y = x^2$ như các nghiệm (x, y) của phương trình $y - x^2 = 0$. Nói chung, ta xem một đa thức hai biến $P(x, y)$ xác định một đường cong C. Nếu các hệ số của đa thức là các số hữu tỉ thì ta có thể nói đến các nghiệm hữu tỉ của nó, tức là các *điểm hữu tỉ* của đường cong. Sự tồn tại nghiệm hữu tỉ của một đa thức phụ thuộc vào một đặc trưng hình học của đường cong tương ứng, gọi là *giống* của đường cong. Trường hợp giống của đường cong bằng 0 khá đơn giản. Nếu đường cong có giống lớn hơn hay bằng 2 thì nó chỉ có hữu hạn điểm hữu tỉ. Đó là nội dung của định lí Phônting (Faltings) nổi tiếng (xem bài *Định lí Fermat đã được chứng minh*, THTT, 1993). Đối với các đường cong có giống bằng 1, cho đến nay chưa có phương pháp chung nào để xác định một đường cong đã cho là có hay không có điểm hữu tỉ. Khi C có điểm hữu tỉ thì C được gọi là *đường* cong *elliptic* và tập hợp các điểm của nó có cấu trúc của nhóm aben. Nhiều tính chất của đường cong elliptic được thể hiện qua *L - chuỗi* $L(C, s)$ của nó (đó là một chuỗi xác định hoàn toàn tương tự như hàm zêta Riemann. Xem *Nhập môn số học thuật toán*).

Giả thuyết Bơch (Birch) và Suynnơtơn-Đaiơ (Swinnerton-Dyer) nói rằng *hạng của nhóm các điểm hữu tỉ của đường cong elliptic bằng bội của không điểm của L - chuỗi tương ứng tại s = 1*. Đặc biệt đường cong có vô hạn điểm hữu tỉ khi và chỉ khi L chuỗi tương ứng bằng 0 tại điểm $s = 1$.

Giả thuyết Birch và Swinnerton-Dyer quan trọng đối với toán học chính vì vai trò của đường cong elliptic trong các vấn đề khác nhau. Ta nhắc lại rằng, đường cong elliptic chính là công cụ chủ yếu để chứng minh Định lí lớn Fermat. Gần đây, đường cong elliptic cũng tham gia vào việc thiết lập các hệ mật mã khóa công khai. Mặt khác, nếu giả thuyết Birch và Swinnerton- Dyer đúng thì ta cũng có thể giải được bài toán mở đã được đặt ra hàng trăm năm trước : *tìm tất cả các số nguyên n sao cho tồn tại tam giác vuông với số đo các cạnh là số hữu tỉ và số đo diện tích bằng n./.*



Đề thi Ôlympic toán của ĐÀI LOAN (3/1996)

Bài 1. Giả sử các góc α, β, γ thỏa mãn $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$; $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ và $tg\alpha = \frac{1}{a}$, $tg\beta = \frac{1}{b}$, $tg\gamma = \frac{1}{c}$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương. Hãy xác định các giá trị a, b, c.

Bài 2. Giả sử số thực a thỏa mãn $0 < a \le 1$ và $a \le a_j \le \frac{1}{a}$ với $j = 1, 2, ..., 1996$. Chứng minh rằng với các số thực không âm t_j ($j = 1, 2, ..., 1996$) mà $\sum_{j=1}^{1996} t_j = 1$ thì

$$\left(\sum_{i=1}^{1996} t_i a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{1996} t_j a_j^{-1}\right) \le \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$$

Bài 3. A và B là hai điểm cố định trên đường tròn đã cho. Giả sử điểm P chạy trên đường tròn này và điểm M tương ứng sao cho : hoặc M thuộc đoạn thẳng PA với $AM = MP + PB$, hoặc M thuộc đoạn thẳng PB với $AP + MP = PB$. Tìm quỹ tích các điểm P như thế.

Bài 4. Chứng minh rằng với các số thực bất kì $a_3, a_4, ..., a_{85}$ thì các nghiệm của phương trình sau không phải đều là số thực :

$$a_{85}x^{85} + a_{84}x^{84} + ... + a_3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

Bài 5. Tìm tất cả 99 số nguyên $a_1, a_2, ..., a_{99} = a_o$ mà $|a_{k-1} - a_k| \ge 1996$ với mọi $k = 1, 2, ..., 99$ sao cho số $m = \max\{|a_{k-1} - a_k|; k = 1, 2, ..., 99\}$ là nhỏ nhất có thể được, và xác định giá trị nhỏ nhất m^* của m.

Bài 6. Giả sử $q_o, q_1, q_2, ...$ là dãy số nguyên thỏa mãn đồng thời các điều kiện :

(1) với mỗi $m > n$ thì $m-n$ là ước của $q_m - q_n$

(2) $|q_n| \le n^{10}$ với mọi số nguyên $n \ge 0$.

Chứng minh rằng tồn tại đa thức $Q(x)$ sao cho $Q(n) = q_n$ với mọi n.

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

VÀI ƯỚC LƯỢNG TRONG TỨ DIỆN

PHẠM HỒNG QUÂN
(12 Toán, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương)

MỘT vài ước lượng trong tứ diện ở bài này là sự mô phỏng các ước lượng tương tự đã có trong tam giác mà theo tôi biết thì đây là những phép chứng minh mới và một một vài kết quả mới.

Đối với tam giác ABC ta kí hiệu S là diện tích và $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Đối với tứ diện $ABCD$ ta kí hiệu :

V là thể tích ; $S(BCD)$ là diện tích của ΔBCD hoặc viết tắt $S_A = S(BCD)$.

$S_{tp} = S_A + S_B + S_C + S_D$

$\sum = AB + AC + AD + BC + BD + CD.$

$\mathbf{P} = AB.AC.AD.BC.BD.CD$

(XY) là số đo của các nhị diện cạnh XY.

Xin bắt đầu với ước lượng liên quan đến diện tích toàn phần.

Bài toán 1: *Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng :*

$$\sum^2 \geq 12\sqrt{3}\, S_{tp} \qquad (1)$$

Để chứng minh ta sử dụng bổ đề quen thuộc sau trong tam giác :

Bổ đề 1 : Cho tam giác ABC, ta có : $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}\, S$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Trở lại bài toán 1. Áp dụng bổ đề 1 cho các tam giác : BCD, CDA, DAB, ABC, ta được bốn bất đẳng thức. Cộng theo từng vế của các bất đẳng thức này và rút gọn ta có :

$$(AB+CD)(AC+DB) + (AC+BD)(AD+BC) + (AD+BC)(AB+CD) \geq 4\sqrt{3}\, S_{tp} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\Big((AB+CD) + (AB+CD) + (AD+BC)\Big)^2 \geq 4\sqrt{3} S_{tp}$$

$$\Rightarrow \sum^2 \geq 12\sqrt{3}\, S_{tp}.$$

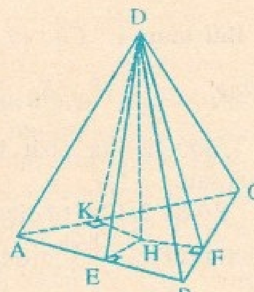
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ Các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC đều

$\Leftrightarrow$ Tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều.

Bài toán 2. *Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng :* $S_{tp}^3 \geq 216\sqrt{3}\, V^2$ *(2)*

Để chứng minh ta sử dụng bổ đề quen thuộc sau trong tam giác :

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC, ta có : $a + b + c \geq 12\sqrt{3}\, S$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.



Hình 1

Trở lại bài toán 2. Gọi H là hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC). Gọi E, F, K là hình chiếu của H trên các đường thẳng AB, BC, CA.

Đặt $DH = h$, $HF = x$, $HK = y$, $HE = z$

Theo định lí Pitago ta có : $DF = \sqrt{h^2 + x^2}$,

$DK = \sqrt{h^2 + y^2}$, $\quad DE = \sqrt{h^2 + z^2}$.

Vậy : $S_A + S_B + S_C$

$$= \frac{1}{2}(BC.DF + CA.DK + AB.DE)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a\sqrt{h^2+x^2} + b\sqrt{h^2+y^2} + c\sqrt{h^2+z^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(ah)^2 + (ax)^2} + \sqrt{(bh)^2 + (by)^2} + \sqrt{(ch)^2 + (cz)^2}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\sqrt{(ah+bh+ch)^2 + (ax+by+cz)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^2.h^2 + 4(S(HBC) + S(HCA) + S(HAB))^2}$$

$$\geq \frac{1}{2}\sqrt{12\sqrt{3}S_D h^2 + 4S_D^2} \text{ (Theo bổ đề 2)}$$

$$= \sqrt{3\sqrt{3}S_D h^2 + S_D^2}$$

Suy ra : $(S_A + S_B + S_C)^2 \geq 3\sqrt{3}S_D h^2 + S_D^2$

$$\Rightarrow S_{tp}(S_A + S_B + S_C - S_D) \geq 3\sqrt{3}S_D h^2$$

$$\Rightarrow S_{tp}(S_A + S_B + S_C - S_D)2S_D \geq 54\sqrt{3}V^2$$

$$\Rightarrow S_{tp}\left(\frac{S_A + S_B + S_C - S_D + 2S_D}{2}\right)^2 \geq 54\sqrt{3}V^2$$

$$\Rightarrow S_{tp}^2 \geq 216\sqrt{3}V^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{ax}{ah} = \frac{by}{bh} = \frac{cz}{ch}$, ΔABC đều, H nằm trong ΔABC, $S_A + S_B + S_C - S_D = 2S_D$, nghĩa là khi và chỉ khi chóp $D.ABC$ là chóp đều và $S_A = S_B = S_C = S_D$, tức là tứ diện ABC là tứ diện đều.

Các bất đẳng thức (1), (2) đã có trong nhiều tài liệu toán sơ cấp, chẳng hạn báo THTT số 116 tháng 5 +6 năm 1980 với bài "vài ước lượng hình học" của GS Phan Đức Chính. Tuy nhiên các phép chứng minh của (1) và (2) theo tôi là mới.

Bài toán 3. *Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng :* $\mathbf{P} \geq 72V^2 \qquad (3).$

Bất đẳng thức (3) mới xuất hiện gần đây trên báo THTT số 271 tháng 1 năm 2000, chứng minh có trong lời giải bài T10/267. BĐT (3) cho phép ta đoán nhận kết quả sau :

Bài toán 4 : *Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng :*

$$(S_A \cdot S_B \cdot S_C \cdot S_D)^3 \geq \frac{2^{12}}{3^{14}} V^8 \qquad (4)$$

Trước hết ta phát biểu và chứng minh kết quả sau.

Bổ đề 3. Cho tứ diện $ABCD$, ta có :

$\prod\limits_{(XY)} \sin(XY) \leq \left(\frac{8}{9}\right)^3$, trong tích này (XY) lấy đủ giá trị các góc nhị diện của tứ diện.

Chứng minh. Gọi H là hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC) (xem hình 1). Ta có :

$$\cos^2(BC) + \cos^2(CA) + \cos^2(AB)$$
$$= \left(\frac{S(HBC)}{S_A}\right)^2 + \left(\frac{S(HCA)}{S_B}\right)^2 + \left(\frac{S(HAB)}{S_C}\right)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$$\cos^2(BC) + \cos^2(CA) + \cos^2(AB) \geq$$
$$\left(\frac{S(HBC)+S(HCA)+S(HAB)}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2}\right)^2$$
$$\Rightarrow \cos^2(BC) + \cos^2(CA) + \cos^2(AB)$$
$$\geq \left(\frac{S_D^2}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2}\right) \qquad (*)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{S(HBC)}{S_A} = \dfrac{S(HCA)}{S_B} = \dfrac{S(HAB)}{S_C} \\ H \text{ nằm trong tam giác } ABC \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (BC) = (CA) = (AB).$

Tương tự như bất đẳng thức (*) ta có 4 bất đẳng thức đối với các mặt và các góc nhị diện khác.

Cộng theo từng vế của 4 BĐT nói trên ta có :

$$2\sum_{(XY)} \cos^2(XY) \geq \sum_{(A,B,C,D)} \frac{S_A^2}{S_B^2 + S_C^2 + S_D^2}$$

trong tổng này (A, B, C, D) lấy 4 giá trị hoán vị vòng quanh.

Dễ thấy $\displaystyle\sum_{(A,B,C,D)} \frac{S_A^2}{S_B^2 + S_C^2 + S_D^2} \geq \frac{4}{3}$

Từ đó suy ra : $\displaystyle\sum_{(XY)} \cos^2(XY) \geq \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \sum_{(XY)}(1 - \sin^2(XY)) \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{(XY)} \sin^2(XY) \leq \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt[3]{\prod_{(XY)} \sin(XY)} \leq \frac{16}{3} \Rightarrow \prod_{(XY)} \sin(XY) \leq \left(\frac{8}{9}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tất cả các góc nhị diện bằng nhau $\Leftrightarrow$ Tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều.

Ta sử dụng bổ đề quen thuộc sau đây :

Bổ đề 4. Cho tứ diện $ABCD$, ta có :

$$V = \frac{2}{3} \frac{S_C.S_D.\sin(AB)}{AB}$$

Trở lại bài toán 4. Áp dụng bổ đề 4 sáu lần và nhân theo từng vế của các đẳng thức nhận được ta có :

$$V^6 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6 (S_A.S_B.S_C.S_D)^3 \prod\limits_{(XY)} \sin(XY)}{\mathbf{P}}$$

Sử dụng kết quả của bài toán 3 và bổ đề 3 ta có :

$$V^3 \leq \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6 (S_A.S_B.S_C.S_D)^3}{\frac{1}{72}V^2}$$

$$\Rightarrow V^6 \leq \frac{2^{12}}{3^{14}} (S_A.S_B.S_C.S_D)^3$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ Tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều.

Các kết quả nhận được trong bổ đề 3 và bài toán 4 theo tôi là mới. Nhờ bất đẳng thức Côsi, ta thấy (4) là sự mở rộng của (2). Nhờ bất đẳng thức quen thuộc $S^3 \leq \frac{3\sqrt{3}}{64} a^2b^2c^2$ đối với tam giác ABC bất kì, ta thấy (4) là sự mở rộng của (3).

Xin mời các bạn giải tiếp một số bài toán sau :

Bài toán 5. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng : $\displaystyle\sum_{(XY)} \sin(XY) \leq 4\sqrt{2}.$

Bài toán 6. Trong các tứ diện ngoại tiếp một mặt cầu cho trước, hãy tìm tứ diện có diện tích toàn phần lớn nhất.

Bài toán 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi R, r theo thứ tự là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp. Chứng minh rằng : $\mathbf{P} \geq 24\frac{R}{r} V^2$.

Bài toán 8 : Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu (O, R) và M là một điểm nằm trong tứ diện.

Chứng minh rằng :

$$MA.V_{(MBCD)} + MB.V_{(MCDA)} + MC.V_{(MDAB)} + MD.V_{(MABC)} \leq \sqrt{R^2 - OM^2}\,.\,V_{(ABCD)}$$

Cuối cùng xin cảm ơn thầy Nguyễn Minh Hà đã động viên và giúp đỡ nhiều để tôi hoàn thành bài viết này.



VỀ BỘ SÁCH GIÁO KHOA TOÁN THPT CHỈNH LÍ HỢP NHẤT

(Sử dụng từ năm học 2000-2001)

NGUYỄN HUY ĐOAN
(Nhà xuất bản Giáo dục)

Từ năm học 2000-2001 các trường THPT trong cả nước sẽ dùng chung 1 bộ sách giáo khoa Toán, thay thế cho 3 bộ sách giáo khoa Toán (SGKT) đã sử dụng từ năm 1990. Xin giới thiệu tóm tắt một số điều chỉnh của bộ sách giáo khoa chỉnh lí hợp nhất (SGKTCLHN) so với các bộ SGK trước đây.

Trong các cuộc thảo luận về SGKT, ý kiến chung đều cho rằng nội dung của SGKT phải gồm những vấn đề cơ bản nhất của bộ môn Toán, đáp ứng được những đòi hỏi của khoa học, của đời sống xã hội và phải không lạc hậu nhiều so với các nước tiên tiến. Qua 10 năm sử dụng, SGKT đã bộc lộ những ưu khuyết điểm của nó, trong đó có một số vấn đề bị khai thác quá sâu cho mục đích thi và luyện thi.

Bộ SGKTCLHN vẫn bao gồm những kiến thức cơ bản như trong 3 bộ SGK trước đây, nhưng có một số điều chỉnh nội dung bằng 3 biện pháp sau :

* Loại bỏ những kiến thức không thật cơ bản.

* Giảm những yếu tố có tính chất kinh viện, học thuật; tăng cường các yếu tố thực hành. Chẳng hạn, bỏ những chứng minh phức tạp, tìm các phương pháp tiếp cận đơn giản tuy có phải hi sinh phần nào tính chính xác khoa học, lựa chọn thêm các ví dụ minh họa...

* Đề cao các yếu tố sư phạm như : thống nhất các kí hiệu và thuật ngữ dùng trong sách, chú ý tính mẫu mực của các ví dụ hay bài giải mẫu, số lượng bài tập ra vừa phải và với những yêu cầu thích hợp, bỏ các bài tập quá khó.

Sau đây trình bày một số nội dung cụ thể :

VỀ ĐẠI SỐ

Đại số 10. Hầu hết các nội dung của chương khoa học và kĩ thuật tính toán được *chuyển sang bộ môn khác* thích hợp hơn, chỉ *giữ lại* phần nói về sai số và tính gần đúng để giúp học sinh trong thực hành giải toán.

Bổ sung thêm một số nội dung cần thiết về lôgic và các kí hiệu lôgic với mức độ đơn giản để học sinh có thể hiểu và sử dụng đúng về sau này.

Các nội dung khác nói chung không có gì thay đổi, ngoại trừ cách trình bày một số vấn đề có *đơn giản hơn* (như hàm số và đồ thị, lí thuyết về phương trình và bất phương trình, bất đẳng thức).

Đại số và Giải tích 11

Về lượng giác, bỏ các vấn đề : hàm số lượng giác ngược, bất đẳng thức lượng giác và bất phương trình lượng giác. Để *chính xác hóa thuật ngữ* và tránh nhầm lẫn, các thuật ngữ "hàm số lượng giác của một góc hay một cung" trước đây, nay gọi là các "giá trị lượng giác của góc hay cung đó"; Còn thuật ngữ "hàm số lượng giác" chỉ dùng cho các hàm số lượng giác với biến số thực.

Về giải tích, khái niệm giới hạn của hàm số được định nghĩa *thông qua khái niệm giới hạn* của dãy số chứ không dùng ngôn ngữ *delta–epsilon*. Cách này làm cho nhiều vấn đề trở nên đơn giản hơn, phù hợp với nhận thức của đa số học sinh. Bên cạnh đó, việc *bỏ bớt* một vài khái niệm như các khái niệm về tổng, hiệu, tích thương của hai dãy số hoặc hai hàm số, khái niệm hàm số liên tục một bên, cũng làm cho ĐSGT11 nhẹ nhàng hơn nhiều so với trước đây.

Giải tích 12. Trong phần đạo hàm và khảo sát hàm số, các công thức tính đạo hàm của hàm số hợp và sơ đồ khảo sát hàm số cùng với *các yêu cầu cụ thể* khi khảo sát từng loại hàm số được nhấn mạnh hơn, giúp cho học sinh tránh được những sai sót dễ mắc phải khi thực hành giải toán. *Thuật ngữ khảo sát hàm số* được dùng thay cho cụm *khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số. Bỏ bài toán* khảo sát hàm số dạng phân thức mà cả tử thức và mẫu thức đều là tam thức bậc hai. Các ví dụ về *tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất* của một hàm số trên *một đoạn* hay *một khoảng* được xác định cụ thể không những giúp học sinh nắm được phương pháp giải toán mà còn tránh được sự lẫn lộn giữa khái niệm này với *khái niệm giá trị cực đại và giá trị cực tiểu* của một hàm số.

(Xem tiếp trang 23)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/279. Tìm mọi số tự nhiên a ($a > 1$) sao cho nếu p là ước số nguyên tố bất kì của a thì số các ước của a mà nguyên tố với p bằng số các ước của a mà không nguyên tố với p.

NGUYỄN HỮU BẰNG
(GV trường THCS Bến Thủy, Vinh, Nghệ An)

Bài T2/279. Chứng minh rằng nếu các số thực x, y, a, b thỏa mãn các điều kiện $x+y = a+b$ và $x^4 + y^4 = a^4 + b^4$ thì $x^n + y^n = a^n + b^n$ với mọi số nguyên dương n.

LÊ DUY NINH
(Khoa Toán trường ĐHSP Hà Nội 2)

Bài T3/279. Chứng minh rằng :

$$(x^2 + y^2)^n \geq 2^n x^n y^n + (x^n - y^n)^2$$

trong đó x, y là các số dương và n là số nguyên dương.

HUỲNH TẤN CHÂU
(GV trường THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T4/279. Cho tam giác đều ABC. Tìm tập hợp tất cả các điểm M nằm trong ΔABC sao cho nếu hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F thì các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.

NGUYỄN HỮU PHƯỚC
(SV trường ĐH Bách khoa, Hà Nội)

Bài T5/279. Cho tam giác đều ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng các tam giác ABC và XYZ có cùng trọng tâm.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV khối PT chuyên toán trường ĐHSP Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/279. Tìm mọi số nguyên dương n sao cho $n < t_n$, trong đó t_n là số các ước nguyên dương của n^2.

VŨ ĐỨC SƠN
(SV K 41 Khoa Toán Tin trường ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T7/279. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{y}{1+y^2} + \dfrac{z}{1+z^2}$, trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

TRẦN NAM DŨNG
(GV khoa Toán trường ĐHKHTN Tp Hồ Chí Minh)

Bài T8/279. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x^2y + y^2z + z^2t + t^2x - xy^2 - yz^2 - zt^2 - tx^2$ trong đó x, y, z là các số thực thuộc $[0; 1]$

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Viện Công nghệ thông tin)

Bài T9/279. Trên mặt phẳng cho ba đường tròn đồng tâm O với bán kính lần lượt là $r_1 = 1$, $r_2 = \sqrt{2}$, $r_3 = \sqrt{5}$. Gọi A, B, C là ba điểm không thẳng hàng lần lượt nằm trên ba đường tròn đó. Gọi S là diện tích ΔABC. Chứng minh rằng $S \leq 3$. Tính độ dài các cạnh ΔABC khi $S = 3$.

HOÀNG HOA TRẠI
(GV trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Bài T10/279. Cho tứ diện $ABCD$ sao cho các cạnh AB, BC, CA đều nhỏ hơn các cạnh DA, DB, DC. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của PD, trong đó điểm P thỏa mãn điều kiện $PD^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2$.

LƯU XUÂN TÌNH
(GV trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/279. Một xe chở cát chịu tác dụng theo phương ngang bởi một lực kéo F không đổi có hướng trùng với hướng của vectơ vận tốc $\vec{v}$ của xe. Do một lỗ thủng ở sàn xe, cát chảy xuống với lưu lượng không đổi c (kg/s). Xác định gia tốc và vận tốc của xe ở thời điểm t, nếu lúc $t = 0$ khối lượng của xe bằng m_o và vận tốc của xe bằng không. Bỏ qua mọi ma sát.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV trường THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/279. Quả cầu nhỏ tích điện treo bằng dây nhẹ, không dãn, cách điện, dài $l = 1m$, trong một điện trường đều nằm ngang, dây treo lệch một góc $\alpha = 60^\circ$.

Sau đó đổi đột ngột hướng điện trường (cường độ vẫn giữ nguyên). Khi dây treo lệch góc $\alpha_1 = 30^\circ$ (cùng phía lệch ban đầu so với phương thẳng đứng) thì vật va chạm đàn hồi vào một cọc cố định thẳng đứng. Biết rằng ngay trước va chạm điện trường bị ngắt. Hỏi vật nẩy lên đến độ cao nào ?

TRẦN MẠNH HÙNG
(GV khối Chuyên Toán–Tin, ĐHSP Vinh, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/279. Find all natural numbers a $(a > 1)$ such that for every prime divisor p of a, the number of divisors of a which are relatively prime to p is equal to the number of divisors of a which are not relatively prime to p.

T2/279. Prove that if the real numbers x, y, a, b satisfy the conditions $x + y = a + b$ and $x^4 + y^4 = a^4 + b^4$ then $x^n + y^n = a^n + b^n$ for every positive integer n.

T3/279. Prove that

$$(x^2 + y^2)^n \geq 2^n x^n y^n + (x^n - y^n)^2$$

where x, y are positive numbers and n is a positive integer.

T4/279. Let ABC be an equilateral triangle. Find the locus of points M inside ΔABC such that if the orthogonal projections of M on the lines BC, CA, AB are respectively D, E, F then the lines AD, BE, CF are concurrent.

T5/279. Let ABC be an equilateral triangle and M be a point inside ΔABC. Let X, Y, Z be respectively the mirror-images of M through the lines BC, CA, AB. Prove that the triangles ABC and XYZ have the same centroid.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/279. Find all positive integers n such that $n < t_n$, where t_n is the number of positive divisors of n^2.

T7/279. Find the greatest value of the expression $P = \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{y}{1+y^2} + \dfrac{z}{1+z^2}$, where x, y, z are real numbers satisfying the condition $x + y + z = 1$.

T8/279. Find the greatest value of the expression

$$x^2y + y^2z + z^2t + t^2x - xy^2 - yz^2 - zt^2 - tx^2$$

where x, y, z are real numbers belonging to $[0; 1]$

T9/279. In plane, let be given three concentric circles with center O and radii $r_1 = 1$, $r_2 = \sqrt{2}$, $r_3 = \sqrt{5}$. Let A, B, C be three non collinear points lying respectively on these circles and let S be the area of ΔABC. Prove that $S \leq 3$. Calculate the measures of the sides of ΔABC when $S = 3$.

T10/279. Let $ABCD$ be a tetrahedron such that the measures of the sides AB, BC, CA are all less than the measures of the sides DA, DB, DC. Calculate the greatest value and the least value of the measure of PD where P is a point satisfying the condition

$$PD^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2.$$

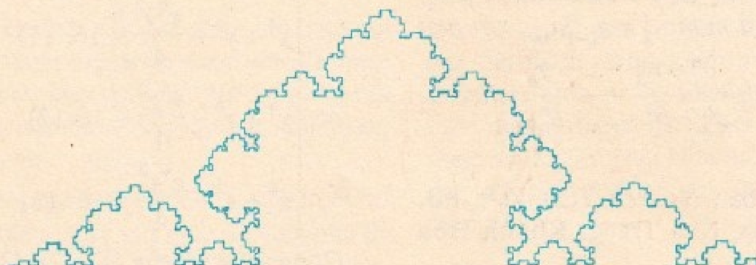
TOÁN HỌC MUÔN MÀU *(Tiếp bìa 2)*

Giải đáp bài : *MANĐENBRÔT VÀ HÌNH TỰ ĐỒNG DẠNG*

1) Đa số các bạn đã trả lời : Hình bên trái mô tả cơn lốc xoáy, hình bên phải mô tả cảnh tảng băng trên bờ biển.

2) Năm tặng phẩm dành cho các bạn có tên dưới đây đã vẽ hình E_4 đúng :

- *Nguyễn Tiến Hưng*, 691 Lê Thanh Nghị, thành phố Hải Dương
- *Phạm Tiến Dũng*, Thôn 12 khuyến Nông, Triệu Sơn, Thanh Hóa
- *Nguyễn Phương Ngọc*, 10A6, THPT Hoàng Quốc Việt, Mạo Khê, Đông Triều, Quảng Ninh
- *Phạm Xuân Huy*, 11A1, THPT Thái Phúc, Thái Thụy, Thái Bình
- *Trương Minh Nghĩa*, tập thể cơ khí điện tử, Thanh Xuân Bắc, Quận Thanh Xuân, Hà Nội.





Bài T1/275. *Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình*

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$$

Lời giải. của *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**.

Giả sử $x, y \in Z$ thỏa mãn : $\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$ hay $7(x+y) = 3(x^2-xy+y^2)$(1) với các $x, y \neq 0$.

Đặt $p = x+y$, $q = x-y$ ta có $x = \frac{p+q}{2}$, $y = \frac{p-q}{2}$.

Thay các x, y này vào (1) ta có :

$$28p = 3(p^2 + 3q^2) \qquad (2)$$

Từ đó suy ra $28p \,\vdots\, 3$ hay $p \,\vdots\, 3$ $\Rightarrow p = 3k$ $(k \in \mathbf{Z})$

Thay giá trị của p vào (2) ta có :

$$28k = 3(3k^2 + q^2) \qquad (3)$$

Suy ra $k \,\vdots\, 3 \Rightarrow k = 3m$ $(m \in \mathbf{Z})$.

Thay giá trị của k vào (3) ta được

$$28m = 27m^2 + q^2 \Rightarrow m(27m-28) = -q^2 \leq 0$$

Từ đó suy ra $0 \leq m \leq \frac{28}{27}$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Với $m = 0$ thì $p = q = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$ (loại)

Với $m = 1 \Rightarrow p = 9, q = \pm 1$

Tóm lại ta có $(x=5, y=4)$ hoặc $(x = 4, y = 5)$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho là $(x = 5, y = 4)$ hoặc $(x = 4, y = 5)$.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn có lời giải tốt.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/275. *Cho n+1 $(n \geq 2)$ số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ khác 0 thỏa mãn $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1}$ với mọi $k = 2, 3, \ldots, n$. Tính $\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}{a_2^n + a_3^n + \ldots + a_{n+1}^n}$ theo a_1 và a_{n+1}.*

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Tiến Việt*, 8B, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa** và của nhiều bạn khác).

Từ $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1}$ ta có $\frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{a_k}{a_{k+1}}$ với mọi $k = 2, 3, \ldots, n$.

Đặt $S = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, ta có

$$S^n = \frac{a_1^n}{a_2^n} = \frac{a_2^n}{a_3^n} = \ldots \frac{a_{n-1}^n}{a_n^n} = \frac{a_n^n}{a_{n+1}^n}$$

$$= \frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}{a_2^n + a_3^n + \ldots + a_{n+1}^n}$$

Mặt khác $S^n = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$.

Vậy $\frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n}{a_2^n + a_3^n + \ldots + a_{n+1}^n} = \frac{a_1}{a_{n+1}}$.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn giải giống như lời giải trên, nhưng tất cả các bạn đều quên rằng có thể xảy ra trường hợp $a_2^n + a_3^n + \ldots + a_{n+1}^n = 0$ (chẳng hạn với $n=2$, $a_1 = a_3 = 1$, $a_2 = -1$) khi đó tỉ số cần tính không xác định. Hầu hết lời giải của các bạn đều ngắn gọn, trừ một số bạn chứng minh bằng phương pháp quy nạp, không được ngắn gọn bằng lời giải trình bày trên. Cũng có bạn trình bày lời giải quá tắt, là điều nên tránh

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/275. *Cho các số thực x, y, z nằm trong [−2; 2]. Chứng minh rằng :*

$$2(x^6+y^6+z^6) - (x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2) \leq 192.$$

Lời giải. *Cách 1.* Từ giả thiết ta có $x^2, y^2, z^2 \in [0; 4]$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4-y^2)\left(4+y^2-\frac{x^4}{4}\right) \geq 0 \\ (4-z^2)\left(4+z^2-\frac{y^4}{4}\right) \geq 0 \\ (4-x^2)\left(4+x^2-\frac{z^4}{4}\right) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4+y^4-\frac{x^4y^2}{4} \leq 16 \quad (1) \\ y^4+z^4-\frac{y^4z^2}{4} \leq 16 \quad (2) \\ z^4+x^4-\frac{z^4x^2}{4} \leq 16 \quad (3) \end{cases}$$

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta có :

$2(x^4+y^4+z^4) - \frac{1}{4}(x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2) \le 48$

$\Rightarrow 4(x^4+y^4+z^4) - \frac{1}{2}(x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2) \le 96$ (4)

Mặt khác : Vì $0 \le x^2, y^2, z^2 \le 4$ nên :
$4x^4 \ge x^6$; $4y^4 \ge y^6$; $4z^4 \ge z^6$. Do đó :
$4(x^4+y^4+z^4) \ge x^6 + y^6 + z^6$ (5)

Từ (4) và (5) ta có :

$x^6+y^6+z^6 - \frac{1}{2}(x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2) \le 96$

$\Rightarrow 2(x^6+y^6+z^6) - (x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2) \le 192$

Đẳng thức xảy ra
$\Leftrightarrow (x^2; y^2; z^2) \in \{(4; 4; 4) ; (4; 4; 0) ; (4; 0; 4), (0; 4; 4)\}$

$\Leftrightarrow (x; y; z) \in \{(\pm2; \pm2; \pm2) ; (\pm2; \pm2; 0) ; (\pm2; 0; \pm2); (0; \pm2; \pm2)$;

Cách 2. Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên giả sử $|x| \le |y| \le |z| \le 2$. Khi đó :

$$\begin{cases} x^4(x^2-y^2) \le 0 & (1) \\ x^2(x^4-z^4) \le 0 & (2) \\ y^4(2y^2-z^2) \le y^4z^2 \le z^6 & (3) \end{cases}$$

$\Rightarrow 2(x^6+y^6+z^6) - (x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2) \le 3z^6 \le 3.2^6 = 192$ (*)

Ta thấy (*) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow |z| = 2$ và (1), (2), (3) đồng thời trở thành đẳng thức.

Vì (3) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow |y| = |z|$

(2) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ |x| = |z| \end{array}\right.$

(1) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ |x| = |y| \end{array}\right.$

Vậy (*) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow |y| = |z| = 2$ và $|x| = 2$ hoặc $x = 0$, từ đó ta có kết quả như phần cuối cách 1.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn tìm các khả năng để đẳng thức xảy ra còn thiếu : trong 3 giá trị |x| ; |y| ; |z| có 2 giá trị là và 1 giá trị là 0.

2) Một số bạn đã tổng quát hóa bài toán và cho kết quả đúng.

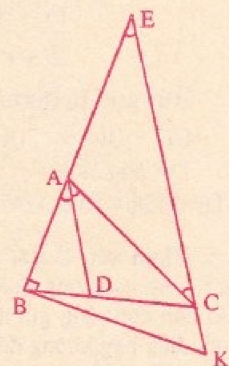
3) Các bạn cho lời giải tốt là : **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Thanh*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; *Trần Anh Tuấn*, 9A1, THCS Lương Thế Vinh; **Hải Phòng:** *Bùi Văn Tuấn*, 9A, THCS Tự Cường, Tiên Lãng; **Nghệ An:** *Trung Tuấn Dũng, Trương Bình Nguyên*, 9B, THCS Đặng Thai Mai; Tp Vinh; *Nguyễn Trọng Chung*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh, Trần Thanh Hải*, 9C, THCS Việt Trì; **Ninh Bình:** *Nguyễn Văn Đạo*, 6E, THCS Yên Phong, Yên Mô, *Phạm Quang Huy*, 9 Toán, THCS thị trấn Ninh, Yên Khánh; **Đồng Tháp:** *Võ Hữu Trí*, $8A^6$, THCB thị xã Cao Lãnh; **Hà Tây:** *Trịnh Xuân Tú*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền ; *Phạm Minh Quyết*, 9A, THCS Kim Đường, Ứng Hòa; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Thành Nhân*, 9A, THPT thực hành Sư phạm, thị xã Bạc Liêu; **Vĩnh Phúc:** *Trần Văn Nam*, 8C, THCS Đồng Ích, Lập Thạch; **Yên Bái:** *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, thị xã Yên Bái; **Bắc Giang:** *Thân Thị Huệ*, 8C, THCS Tiền Phong, Yên Dũng; **Hải Dương:** *Nguyễn Thành Nam*, 9A, THCS Nguyễn Trãi; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Khuây*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, Q. Phú Nhuận; **Bắc Ninh:** *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Quảng Trị:** *Phan Quốc Hưng*, 9A, THCS thị trấn Hải Lăng; **Thanh Hóa:** *Lê Khắc Huyên*, 9B, THCS Thiện Vận, Thiện Yên. ..

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/275. *Chứng minh rằng ΔABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ là tam giác vuông khi xảy ra một trong các đẳng thức sau :*

1) $tg\frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$; *2)* $tg^2\frac{A}{2} = \frac{|b-c|}{b+c}$

Lời giải. *Cách 1.* Gọi AD ($D \in BC$) là đường phân giác của góc A. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AC = b$. Dễ thấy $\angle BAD = \angle DAC = \angle ACE = \angle AEC$ nên $AD // EC$. Kẻ đường thẳng BK vuông góc với BE, cắt đường thẳng EC ở K. Ta có :



$$tg\frac{A}{2} = tgE = \frac{BK}{BE} = \frac{BK}{b+c} \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $b \ge c$ thì $\angle ABD \ge \angle ACD \Rightarrow \angle ADB \le \angle ADC \Rightarrow \angle ADC$ vuông hoặc tù. Từ đó và từ $AD // EC$ suy ra $\angle DCE$ là góc nhọn (2).

1) Từ giả thiết $tg\frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ và (1) suy ra $BK = a = BC$. Từ đó hoặc K trùng với C nghĩa là $\angle ABC = 90^o$, hoặc ΔBCK cân ở đỉnh B nhưng điều này không xảy ra do (2).

2) Với giả sử $b \ge c$ giả thiết trở thành $tg^2\frac{A}{2} = \frac{b-c}{b+c}$. Kết hợp với (1) có

$$\frac{BK^2}{(b+c)^2} = \frac{(b-c)(b+c)}{(b+c)^2} \Rightarrow BK^2 = b^2 - c^2.$$

Mặt khác $AK^2 = BK^2 + c^2$ nên $AK^2 = b^2 = AC^2$. Từ đó hoặc K trùng với C nghĩa là $\angle ABC = 90^o$, hoặc ΔACK cân ở đỉnh A nhưng điều này không xảy ra do (2).

Cách 2. Giả sử đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp ΔABC. Kẻ $IE \perp AC$ thì

$$\text{tg}\frac{A}{2} = \frac{IE}{AE} = \frac{r}{p-a} = \frac{pr}{p(p-a)} = \frac{S}{p(p-a)}$$

$$= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}} \quad (3)$$

1) Từ $\text{tg}\frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ và (3) suy ra

$$\frac{a^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}.$$

Rút gọn ta được $a^4 = (b^2 - c^2)^2$ hay $a^2 = |b^2-c^2|$. Từ đó suy ra ΔABC vuông ở B hoặc C.

2) Từ $\text{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{|b-c|}{b+c}$ và (3) suy ra

$$\frac{|b-c|}{b+c} = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}.$$

Rút gọn ta được

$(a^2 - (|b^2 - c^2|)(b+c + |b-c|) = 0.$

Do $b+c + |b-c| > 0$ nên có $a^2 - |b^2 - c^2| = 0$. Từ đó suy ra ΔABC vuông ở B hoặc C.

Nhận xét. 1. Rất nhiều bạn biến đổi quá dài hoặc sử dụng các công thức lượng giác bậc THPT (!). Một số bạn cho rằng giả thiết ở đề bài là điều kiện cần và đủ, điều này không đúng vì dễ dàng chứng tỏ rằng góc A nhọn. Có bạn sử dụng đồng thời cả 2 điều kiện giả thiết (quá mạnh) để chứng minh ΔABC vuông ở B hoặc C. Không ít bạn chứng minh được $BK = BC$ suy ra ngay K trùng với C, chú ý rằng khi ΔBCK cân ở đỉnh B mà không giả sử $b \geq c$ thì suy ra ΔABC vuông ở C.

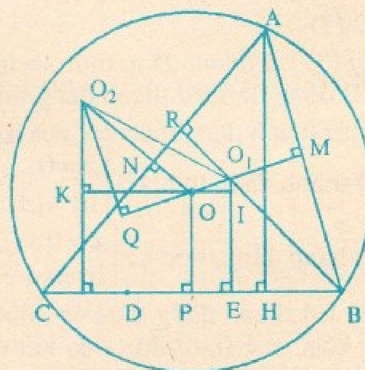
2. Các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn hơn :

Yên Bái: *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, Tx Yên Bái; **Phú Thọ:** *Bùi Quang Nhã, Đinh Thái Sơn*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Trường*, 8B, THCS Yên Lạc, *Hoàng Minh Hải*, 9C, THCS Tam Đảo, Tam Dương ; **Nam Định:** *Đỗ Thị Hải Yến*, 9B, THCS Hải Hậu; **Hải Dương:** *Đỗ Quang Trung, Vũ Hồng Minh*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương; **Hà Nội:** *Nguyễn Anh Tôn*, 9T, THCS Ngô Sĩ Liên, *Vũ Quốc Mỹ*, 9H, THCS Trưng Vương; **Nghệ An:** *Lê Văn Đức*, 9D, THCS Bến Thủy, Vinh, *Phạm Thái Khánh Hiệp*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, *Trần Thị Như Ngọc*, 8A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, *Lê Quốc Đô*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Hà Tĩnh:** *Thái Tuấn Anh*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Gia Lai:** *Đặng Thanh Nhàn*, 7/1, THCS Biển Hồ, Plâyku; **Kon Tum:** *Nguyễn Lương Thùy Viên*, 7A, TH chuyên Kon Tum; **Phú Yên:** *Huỳnh Việt Linh*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, Tx Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình, Nguyễn Minh Châu*, 9/15, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hoàng Hiền*, 9/20, THCS Hồng Bàng; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Thành Nhân*, 9A, THCS thực hành Tx Bạc Liêu

VIỆT HẢI

Bài T5/275. *Cho tam giác ABC có diện tích S và BC = a. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho* $\frac{DB}{DC} = k$. *Tính diện tích tam giác có các đỉnh là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ABD, ACD theo a, k, S.*

Lời giải. • Giả sử $k > 1$ và các góc B, C nhọn. Gọi O, O_1, O_2 là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ABD, ACD tương ứng. Suy ra $OO_1 \perp AB$ và $MA = MB$, $OO_2 \perp AC$ và $NA = NC$. Do O_1MBE nội tiếp nên $\angle OO_1I = \angle ABH$.



Từ đó $\Delta OO_1I \backsim \Delta ABH$ nên

$$OO_1 = OI \times \frac{AB}{AH} \quad (1)$$

Ta lại có

$$OI = PE = \frac{2(PE+EB) - 2EB}{2} = \frac{BC - BD}{2} = \frac{CD}{2}$$

Từ giả thiết suy ra $\frac{BC}{CD} = k + 1$ nên

$CD = \frac{a}{k+1}$. Do đó $OI = \frac{a}{2(k+1)}$. Cùng với (1)

suy ra $OO_1 = \dfrac{a}{2(k+1)} \cdot \dfrac{AB}{AH}$ (2)

Tương tự

$OO_2 = OK \times \dfrac{AC}{AH} = \dfrac{ak}{2(k+1)} \times \dfrac{AC}{AH}$ (3)

Xét hai tam giác vuông O_2OQ và BAR có $\angle O_2OQ = \angle BAR$ (do $AMON$ là tứ giác nội tiếp). Do vậy $\Delta O_2OQ \backsim \Delta BAR$. Suy ra

$O_2Q = OO_2 = \dfrac{BR}{AB}$ (4)

Từ (2), (3) và (4) ta có :

$$S_{OO_1O_2} = \frac{1}{2} O_2Q \times OO_1 = \frac{1}{2} OO_2 \times \frac{BR}{AB} \times OO_1$$

$$= \frac{ka^2}{8(k+1)^2} \times \frac{BR.AC}{AH^2}$$

$$= \frac{ka^2}{8(k+1)^2} \times \frac{2S}{(2S/a)^2} = \frac{ka^4}{16S(k+1)^2}$$

• Khi $k < 1$ và B hoặc C tù vẫn có kết quả như trên.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, **Hải Dương:** *Phạm Thành Trung*, 9A, Nguyễn Trãi; **Bắc Ninh:** *Đặng Thành Long*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** *Vũ Quốc Mỹ*, 9H, THCS Trưng Vương; **Nghệ An:** *Phan Trung Kiên*, 9C, THCS Nam Đàn, *Võ Văn Thành*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Kon Tum:** *Nguyễn Lương Thùy Viên*, 7A, THCS chuyên Kon Tum; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9^{15}, THCS Thái Nguyên; **Đồng Nai:** *Đào Thị Phương* Tuyền, *8/3 THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm.*

VŨ KIM THỦY

Bài T6/275. *Khai triển*

$f(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^{1000})^{1000}$

được đa thức

$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{10^6} . x^{10^6}$

Tính $S = a_o + a_1 + a_2 + ... + a_{1000}$.

Lời giải. (của nhiều bạn)

Trước hết chúng ta chứng minh kết quả sau :

Bổ đề : Cho hai số tự nhiên n, k. Xét tập hợp

$H_{n,k} = \{(x_o, x_1, ..., x_n) | x_o, x_1, ..., x_n \in N, x_o + x_1 + ... + x_n = k\}$.

Ta có $|H_{n,k}| = C^n_{n+k}$.

(Ký hiệu $|A|$ là số phần tử của tập hợp A).

Ta chứng minh bổ đề trên bằng quy nạp toán học theo n.

Khi $n = 0$ thì $H_{o,k} = \{k\}$, $|H_{o,k}| = 1 = C^o_k$ khẳng định đúng.

Giả sử khẳng định đã đúng đến $(n-1)$, $n \geq 1$.

Xét phân hoạch $H_{n,k} = B_o \cup B_1 ... \cup B_k$, trong đó $(x_o, x_1, ..., x_n) \in B_j$ nếu $x_n = j$. Theo quy nạp ta có

$|B_j| = |H_{n-1, k-j}| = C^{n-1}_{n-1+k-j}$ $\forall j = 0, 1, ..., k$.

Dùng công thức

$$C^{i-1}_m + C^i_m = C^i_{m+1}$$

ta có $|H_{n,k}| = \sum_{j=0}^{k} |B_j| = \sum_{j=0}^{k} C^{n-1}_{n-1+k-j}$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(C^n_{n+k-j} - C^n_{n-1+k-j} \right)$$

$= C^n_{n+k}$ (đpcm).

Trở lại bài toán của chúng ta ở dạng tổng quát sau : $m, n \in N$ khai triển

$f(x) = (1 + x + x^2 + ... + x^m)^{n+1}$

được đa thức

$f(x) = a_o + a_1x + ... + a_{m(n+1)} x^{m(n+1)}$

Viết cụ thể khai triển của $f(x)$ ta có

$a_i = |H_{n,i}| = C^n_{n+i}$ $\forall i = 0, 1, ..., m$

$(|H_{n,i}| > a_i$ nếu $i \geq m+1$

Nói riêng

$$a_o + a_1 + ... + a_m = \sum_{i=0}^{m} C^n_{n+i}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \left(C^{n+1}_{n+1+i} - C^{n+1}_{n+i} \right) = C^{n+1}_{n+1+m}.$$

Bài toán của chúng ta là trường hợp $n+1 = m = 1000$, do đó $S = C^{1000}_{2000}$.

Nhận xét. 1) Có 47 bạn gửi lời giải tới Tòa soạn. Hầu hết các bạn giải đúng.

2) Hoan nghênh các bạn học sinh lớp 10 sau đã có lời giải tốt :

Lào Cai: *Nguyễn Quốc Tuấn*, 10A, THPT Lào Cai ; **Hà Nội:** *Vũ Ngọc Minh*, 10A1, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Tuấn Dương*, 10 A Toán, ĐHKHTN-ĐHQG ;

Hải Dương: *Ngô Xuân Bách, Vũ Xuân Nam*, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Phạm Đình Giáp*, 10T, THPT Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Việt Hà*, 10T, THPT Lam Sơn; **TP Hồ Chí Minh:** *Trần Quang*, 10T, PTNK, ĐHQG.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/275. *Với những số a (a > 1) nào thì $x^a \le a^x$ với mọi x > 1 ?*

Lời giải. (Của đa số các bạn)

Với $x > 1$ thì $x^a \le a^x \Leftrightarrow a\ln x \le x\ln a$

$\Leftrightarrow f(x) \le f(a)$ với $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 1$.

Ta có $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $f'(x) = 0$ khi $x = e$.

Nhận xét rằng $f'(x) > 0$ khi $1 < x < e$ và $f'(x) < 0$ khi $x > e$ nên $f(x) < f(e)$ với mọi $1 < x \ne e$. Suy ra, nếu $1 < a \ne e$ thì $f(a) < f(e)$, không thỏa mãn điều kiện bài ra. Vậy $a = e$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Bình Thuận: *Thiều Quang Trung*, 11AG, THPT Trần Hưng Đạo; **Hà Giang:** *Nguyễn Kim Cương*, 11T, THPT chuyên; **Bắc Giang:** *Nguyễn Trọng Cường*, 12C, THPT Hiệp Hòa, *Chu Mạnh Dũng*, 11A, *Ngô Quang Vịnh*, 11A, THPT Ngô Sĩ Liên; **Ninh Bình:** *Phàm Anh Tuấn*, 11T chuyên; **Quảng Bình:** *Lưu Quang Tuấn*, 11 chuyên ; **Tp Hồ Chí Minh :** *Trần Anh Hoàng, Trần Quang*, 10T, *Lâm Hoàng Nguyên, Trần Thượng Văn Du, Huỳnh Thiên Phúc, Nguyễn Đình Hoàng*, 11T, ĐHKHTN, *Huỳnh Ấu Văn, Nguyễn Văn Thắng*, 10CT, *Võ Văn Đức, Nguyễn Ngọc Anh, Trần Đức Mạnh, Nguyễn Văn Thắng*, 11T, *Tạ Quang Công*, 12T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đà Nẵng:** *Cao Thanh Tình*, 12T, THCB Cao Lãnh; **Nam Định:** *Bùi Văn Tùng*, 11B, THPT Trần Nhật Duật, *Hoàng Văn Giang*, 10T, *Phạm Đình Cáp*, 10T, *Lê Hồng Phong, Trương Công Khánh*, 12A, THPT Tống Văn Trân, *Phùng Đại Diện*, 9CT, THPT Nguyễn Du; **Hà Tây:** *Vũ Tiến Dũng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Lương Trung Kiên, 12A10, THPT Phú Xuyên A, *Nguyễn Hữu Quyền*, 11A4, THCS Đan Phượng; **Hải Dương:** *Trần Quang Khải*, 11B, *Nguyễn Văn Định*, 11B3, THPT Nhị chiểu, Kinh Môn, *Tô Minh Hoàng, Vũ Xuân Nam, Nguyễn Tiến Việt Hưng*, 11T, *Chu Ngọc Hưng*, 10T, *Lê Hải Yến*, 10T, *Đoàn Văn Vũ*, 11A5, *Ngô Xuân Bách*, 10T, *Nguyễn Thành Phương, Bùi Duy Thịnh, Nguyễn Phương Thảo*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi. **Hà Nội:** *Đào Tuấn Sơn, Nguyễn Hoàng Thạch*, 10T, *Đặng Ngọc Minh*, 11T, *Lê Hải Bình*, 12T, THPT Amsterdam, *Phan Nhất Thống*, 11A1, PTDL Tôn Đức Thắng, *Phạm Thị Nhung*, 11AT, *Trần Tất Đạt*, 12BT, *Nguyễn Quang Hải, Nguyễn Tuấn Dương*, 10AT, *Nguyễn Kim Thanh*, 10B, *Ngô Quốc Anh*, 11A, *Hoàng Tùng*, 12A, ĐHKHTN, *Vũ Ngọc Minh*, 10A1, ĐHSP; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Duy Đức*, 11AT, *Nguyễn Thừa Thắng*, 11T, THPT chuyên; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Trung*, 11T, *Nguyễn Đức Trường*, 11A, ĐHSP Vinh; **Gia Lai:** *Hoàng Vi Quang*, 11C3, THPT Hùng Vương; **Quảng Trị:** *Lê Anh Tuấn*, 11T, *Bạch Ngọc Công Đức*, 12T, THPT chuyên; **Thanh Hóa:** *Hoàng Minh Tiến*, 11B, THPT Bỉm Sơn, *Phan Văn Tiến*, 12T, *Mai Văn Hà*, 10T, *Nguyễn Nam Thái*, 12F, Lam Sơn, *Nguyễn Văn Trung*, 11A1, THPT Hậu Lộc 1; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THPT Việt Trì, *Nguyễn Hiệp*, 12A, *Trần Hải Minh*, 11A2, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoài Vũ*, 10A1, *Lê Mạnh Hùng, Nguyễn Văn Giáp*, 11A, *Đỗ Mạnh Tùng*, 11A3, *Lê Khánh Hùng*, 12A3, *Trương Thị Hải Duyên*, 12A1, *Tạ Việt Tôn*, 12CT, *Dương Hà Phú*, 12A1, *Trịnh Anh Tuấn*, 12A3, *Lê Quang Hưng*, 12A1, THPT chuyên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Minh Thu*, 12T chuyên, *Nguyễn Văn Tiến*, 12A1, THPT Lương Tài, *Nguyễn Huy Việt*, 21A1, THPT Gia Bình ; **Đắc Lắc:** *Nguyễn Thị Hồng Hạnh*, 11CT, *Phạm Thị Thúy Hằng*, 11CT THPT chuyên Nguyễn Du; **Yên Bái:** *Lục Trí Tuyên*, 11A1, *Nguyễn Việt Hằng*, 11A1, *Trần Việt Yên*, 12A2, THPT chuyên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/275. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$f(x) = \cos^4 x + \sin^2 x + \cos x\sin x$

Lời giải.

$$f(x) = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\cos^2 2x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sin 2x}{2}$$

$$= -\frac{\sin^2 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + 1$$

Đặt $t = \sin 2x$, $-1 \le t \le 1$. Bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của $g(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + 1$ trên $[-1; 1]$. Dễ thấy giá trị nhỏ nhất là $g(-1) = \frac{1}{4}$ đạt được khi $t = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. ($k$ nguyên)

Nhận xét. Tòa soạn nhận được rất nhiều thư của các bạn tham gia giải bài toán này. Tất cả đều giải đúng. Một số bạn nhận xét : giá trị lớn nhất của hàm số trên là $g(1) = \frac{5}{4}$. Xin nêu tên một số bạn trong số các bạn có lời giải tốt : *Nguyễn Thị Hoa*, 11AT, Hồng Quang, **Hải Dương**; *Đoàn Đăng Khoa*, 11 Toán, Tiền Giang, *Võ Viết Hân*, 11G, Hải Lăng, **Quảng Trị**, *Phạm Anh Tuấn*, 11T, **Ninh Bình**, *Nguyễn Diệp*

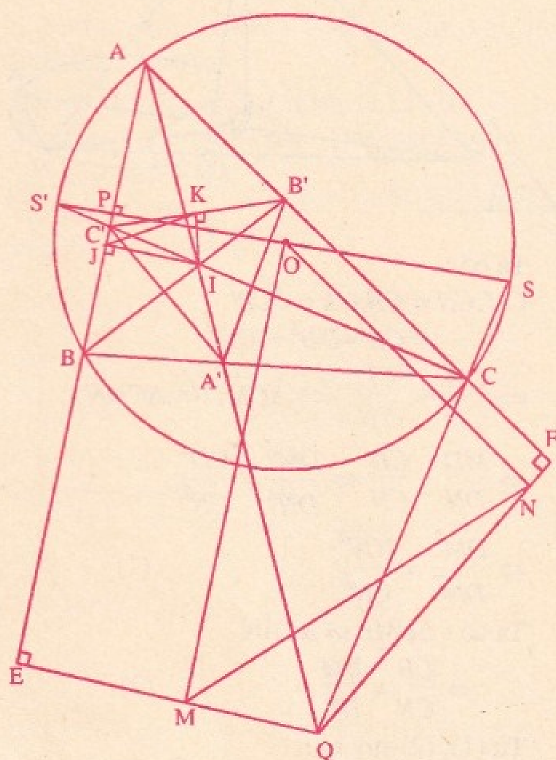
Quỳnh, 9A, Nam Sách, **Hải Dương;** *Nguyễn Lê Hồng Diễm*, 10T, chuyên ban Đồng Tháp, *Nguyễn Quốc Tuấn*, 10A, Lào Cai; *Phạm Văn Hoanh*, 12A, **Quảng Nam**, *Lưu Thị Thúy*, 11 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**, *Tô Thị Liên*, 10G, Trực Ninh, **Nam Định**, *Nguyễn Chí Thành*, 10T, **An Giang**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/275. *Cho tam giác ABC với các đường phân giác trong AA', BB', CC'. Tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I, bán kính r và nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Gọi Q là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Chứng minh rằng :*

1) $IK = \frac{Rr}{OQ}$, *trong đó IK là khoảng cách từ I đến B'C'.* *(i)*

2) $IA' + IB' + IC' \geq 6r\sqrt{\frac{3R}{11R+2r}}$ *(ii)*



Lời giải. (Dựa theo *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**)

1) Gọi S và S' lần lượt là trung điểm cung ACB và cung AB không chứa C, thế thì SS' đi qua O và $SO \perp AB$ ở trung điểm P của cạnh AB, CS' là đường phân giác của $\angle ACB$ nên đi qua C'. Từ đó đường phân giác ngoài CQ của góc $\angle ACB$ đi qua S.

Dựng $IJ \perp AB$ ở J và $IK \perp B'C'$ ở K, ta sẽ chứng minh rằng : $\Delta IJK \backsim \Delta OQS$. Thật vậy, $IJC'K$ và $CC'PS$ là những tứ giác nội tiếp nên ta có : $\angle IKJ = \angle CC'B = \angle OSQ$.

Lại dựng $QE \perp AB$ ở E, $QF \perp AC$ ở F và $OM \perp QE$ ở M, $ON \perp QF$ ở N thế thì ta có :
$\angle B'AC' = \angle CAB = \angle NOM$ (2)

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $a+b+c = 2p$;

Dễ thấy : $AE = AF = p$. Từ đó suy ra :

$$OM = PE = p - \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2},$$

và : $ON = p - \frac{b}{2} = \frac{c+a}{2}$.

Theo tính chất đường phân giác, dễ dàng tính được :

$$AB' = \frac{bc}{c+a}, \qquad AC' = \frac{bc}{a+b}.$$

Từ đó ta được : $\frac{AB'}{AC'} = \frac{a+b}{c+a}$ (4)

Từ (2), (3) và (4) ta được :
$\Delta AB'C' \backsim \Delta OMN$ (5)

Từ đó suy ra : $\angle AC'B' = \angle ONM = \angle OQM$ (do $OMQN$ là tứ giác nội tiếp) (6)

Mặt khác, $EQCC'$ là tứ giác nội tiếp nên ta được : $\angle AC'C = \angle CQE = \angle SQM$ (7)

Từ (6) và (7) suy ra :

$\angle SQO = \angle IC'K = \angle IJK$ (do tứ giác $IJC'K$ nội tiếp) (8)

Cuối cùng, từ (1) và (8) ta suy ra
$\Delta IJK \backsim \Delta OQS$. Từ đó ta được :

$$\frac{IK}{OS} = \frac{IJ}{OQ} \Rightarrow IK = \frac{OS.IJ}{OQ} = \frac{Rr}{OQ} \quad \text{(i)}$$

Gọi IL, IT lần lượt là khoảng cách từ I đến $C'A'$, $A'B$. Chứng minh tương tự như trên ta cũng thu được các hệ thức tương tự như (i). Gọi d_A, d_B, d_C lần lượt là khoảng cách từ O đến tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC; thế thì ta được các hệ thức sau :

$$IK = \frac{Rr}{d_A}, IL = \frac{Rr}{d_B} \text{ và } IT = \frac{Rr}{d_C}.$$

2) Áp dụng BĐT Écđôsơ, trong tam giác $A'B'C'$ ta có :

$$IA' + IB' + IC' \geq 2(IK + IL + IT)$$
$$= 2Rr\left(\frac{1}{d_A} + \frac{1}{d_B} + \frac{1}{d_C}\right) \quad (9)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác $A'B'C'$ là đều nhận I làm trọng tâm.

Theo BĐT Bunhiacôpxki, ta được :

$$3(d_A^2 + d_B^2 + d_C^2) \geq (d_A + d_B + d_C)^2$$

Từ đó : $d_A + d_B + d_C \leq \sqrt{3(d_A^2 + d_B^2 + d_C^2)}$ (10)

Sử dụng các công thức Ơle đã biết và hệ thức : $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

$$d_A^2 = R^2 + 2Rr_a$$

$$d_B^2 = R^2 + 2Rr_b$$

$$d_C^2 = R^2 + 2Rr_c$$

(trong đó r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B và C) được :

$$d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 = 3R^2 + 2R(r_a + r_b + r_c) =$$

$$= 3R^2 + 2R(4R + r) = 11R^2 + 2Rr \quad (11)$$

Từ (10) và (11) ta được :

$$d_A + d_B + d_C \leq \sqrt{3(11R^2 + 2Rr)} \quad (12)$$

Mặt khác, lại có :

$$(d_A + d_B + d_C)\left(\frac{1}{d_A} + \frac{1}{d_B} + \frac{1}{d_C}\right) \geq 9 \quad (13)$$

Và do đó, từ (12) và (13) suy ra :

$$\frac{1}{d_A} + \frac{1}{d_B} + \frac{1}{d_C} \geq \frac{9}{\sqrt{3(11R^2 + 2Rr)}} \quad (14)$$

Cuối cùng từ (9) và (14) ta thu được BĐT (ii) cần tìm. Dấu đẳng thức xảy ra trong tất cả các hệ thức trên khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Nhận xét. 1) Trong lời giải phần 1) của bài toán, nhiều bạn sử dụng các hệ thức lượng giác, biến đổi phức tạp và cồng kềnh. Duy có bạn Minh chỉ sử dụng kiến thức hình học THCS cũng thiết lập được hệ thức (i) như đã nêu trong lời giải trên. Một số ít bạn khác sử dụng định lí hàm số sin trong tam giác cũng thiết lập được hệ thức (i) một cách nhanh chóng (chẳng hạn, bạn Nguyễn Thanh Hải, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc)

2) Lời giải phần 2) đòi hỏi các bạn phải biết sử dụng BĐT Écđôsơ trong tam giác. Tuy nhiên đa số các bạn đều sử dụng các hệ thức đã thu được trong bài toán T9/271, kết quả biến đổi thường cồng kềnh, không thật gọn.

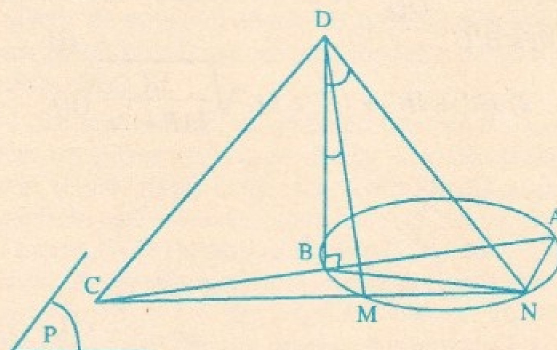
3) Ngoài hai bạn nêu trên, các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thế Thủy*, T11, THPTNK Hàn Thuyên, Bắc Ninh; **Nam Định:** *Hoàng Văn Giang*, 10 Toán, THPT Lê Hồng Phong, Nam Định; **Nghệ An:** *Lê Xuân Hùng*, 10A5, *Nguyễn Trọng Tài*, 10A5, *Phạm Văn Tuấn*, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, thành phố Vinh; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Văn Thắng*, 10CT, THPT Lê Hồng Phong

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/275. *Trên mặt phẳng P cho đường tròn đường kính AB. Lấy điểm C trên tia AB sao cho AC = 2AB. Một đường thẳng qua C cắt đường tròn tại M và N. Dựng điểm D sao cho DB = AB và DB vuông góc với mặt phẳng P. Chứng minh rằng :*

$$\sin^2\angle BDM + \sin^2 BDN = \frac{1}{2}$$

Lời giải. (của bạn *Tô Minh Hoàng*, 11T, THNK **Hải Dương**)



Ta có :

$$CM.CN = CB.CA = 2CB^2$$

$$= CB^2 + DB^2 = CD^2$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{CD} = \frac{CD}{CN} \Rightarrow \Delta CMD \backsim \Delta CDN$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{DN} = \frac{CD}{CN} \Rightarrow \frac{DM^2}{DN^2} = \frac{CD^2}{CN^2}$$

$$\Rightarrow \frac{DM^2}{DN^2} = \frac{2CB^2}{CN^2} \quad (1)$$

Ta có : $\Delta CMB \backsim \Delta CAN$

$$\Rightarrow \frac{CB}{CN} = \frac{BM}{NA} \quad (2)$$

Từ (1); (2) suy ra :

$$\frac{DM^2}{DN^2} = \frac{2BM^2}{AN^2} \Rightarrow \frac{BM^2}{DM^2} = \frac{AN^2}{2DN^2}$$

Vậy :

$$\sin^2\angle BDM + \sin^2\angle BDN = \frac{BM^2}{DM^2} + \frac{BN^2}{DN^2}$$

$$= \frac{AN^2}{2DN^2} + \frac{BN^2}{DN^2} = \frac{AN^2 + 2BN^2}{2DN^2}$$

$$= \frac{(AN^2 + BN^2) + BN^2}{2DN^2}$$

$$= \frac{AB^2 + BN^2}{2DN^2} = \frac{BD^2 + BN^2}{2DN^2} = \frac{DN^2}{2DN^2} = \frac{1}{2}$$

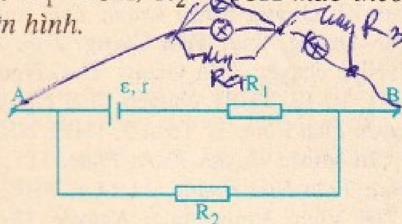
Nhận xét. 1) Nhiều bạn tham gia giải bài toán này với các cách giải khác nhau, tất cả đều giải đúng.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Xuân Trường*, 10A, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hòa Bình:** *Nguyễn Thái Ngọc*, 10T, THPTNK Hoàng Văn Thụ; **Hải Dương:** *Đỗ Thị Ngọc Quỳnh*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Đồng Phương Thảo*, 10T, THPTNK Trần Phú; **Hà Tĩnh:** *Lê Khánh Hưng*, 11A, THPT Minh Khải; **Thanh Hóa:** *Hà Xuân Giáp*, 10T, THPT Lam Sơn; **Hà Nội:** *Vũ Quốc Mỹ*, 9H, THCS Trưng Vương, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 10T, THPT Hà Nội - Amsterdam.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/275. *Một đoạn mạch AB gồm có nguồn (ε, r) trong đó ε = 36V, r = 1Ω, các điện trở R_1 = 8Ω; R_2 = 18Ω mắc theo sơ đồ như trên hình.*



Có các bóng đèn rời : $Đ_1$: 10V–5W; $Đ_2$: 10V–4W và $Đ_3$: 8V–6W. Hãy chỉ ra các phương án mắc các bóng đèn trên vào cụm AB để chúng sáng bình thường (mỗi phương án phải có đủ cả ba bóng đèn). Tính các điện trở phụ có mặt trong các phương án đó.

Hướng dẫn giải. Về nguyên tắc có thể đề ra nhiều phương án khác nhau với số điện trở phụ được lựa chọn một cách tương ứng. Ở đây ta chỉ xét các phương án tối ưu (với số điện trở phụ ít nhất, các điện trở phụ này có trị số hợp lí để đảm bảo công suất tiêu thụ ở các điện trở phụ là ít nhất).

Kí hiệu I_1 là cường độ dòng điện qua mạch gồm các đèn và điện trở phụ, ta có (xem hình vẽ) : $I = I_1 + I_2$; $U_{AB} = I_2R_2 = ε - I(r + R_1)$. Suy ra : $U_{AB} = 24 - 6I_1$.

Cường độ định mức của các đèn :

$I_{đ1} = \frac{P}{U} = 0{,}5A$; $I_{đ2} = 0{,}4A$; $I_{đ3} = 0{,}75A$.

Do đó để các đèn sáng bình thường, không thể mắc nối tiếp các đèn. Suy ra phải có $I_1 > I_{đ1} + I_{đ2} = 0{,}9A \Leftrightarrow U_{AB} = 24 - 6I_1 < 18{,}6V$

$\Leftrightarrow U_{AB} = 10 + 8 = 18(V)$ (phương án a), hoặc $U_{AB} = 10(V)$ (phương án b).

$\Rightarrow I_{1a} = 1A$ và $I_{1b} = \frac{7}{3}A$.

Với phương án a, mắc như sau :

$(Đ_1//Đ_2//R_4)$ nt $(Đ_3//R_3)$;

khi đó $R_4 = \frac{U_{đ1}}{I_{1a} - I_{đ1} - I_{đ2}} = \frac{10}{0{,}1} = 100Ω$, và

$R_3 = \frac{U_{đ3}}{I_{1a} - I_{đ3}} = \frac{8}{0{,}25} = 32Ω$

Với phương án b, mắc như sau :

$(Đ_1//Đ_2//(Đ_3 nt R_3)//R_4)$; khi đó

$R_4 = \frac{U_{đ1}}{I_{1b} - (I_{đ1} + I_{đ2} + I_{đ3})} = 14{,}6Ω$;

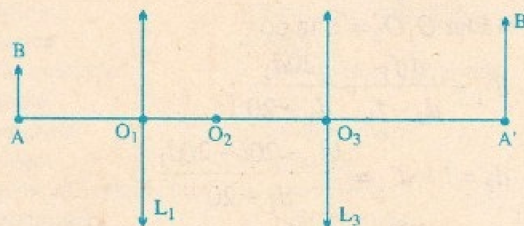
$R_3 = \frac{U_{đ1} - U_{đ3}}{I_{đ3}} = \frac{8}{3}Ω$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Nghệ An: *Đào Vinh Quang*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Nam Định:** *Nguyễn Ngọc Tân*, 11B, THPT Duy Tiên A; **Phú Thọ:** *Vũ Quốc Huy*, 11B (CL) chuyên Hùng Vương; **Đồng Nai:** *Trần Hữu Hiếu*, 10 Lí I, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc:** THPT chuyên Vĩnh Phúc; *Nguyễn Thế Cương*, 12A3, *Nguyễn Minh Kiên*, 10A1

MAI ANH

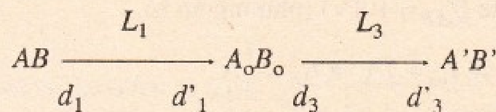
Bài L2/275. *Có hai thấu kính hội tụ L_1 và L_3 đặt cùng trục chính cách nhau 70cm. Vật sáng AB đặt trước L_1 (phía không có L_3) ta được ảnh A'B' nằm sau L_3, lớn gấp 6 lần vật và AA' = 370cm. (Hình vẽ). Đặt thêm thấu kính L_2 tại O_2 (giữa O_1 và O_3) cùng trục chính với hai thấu kính trên.*



- *Với O_1O_2 = 36cm thì ảnh A'B' không đổi.*
- *Với O_1O_2 = 46 cm thì ảnh A'B' ra xa vô cùng.*

Hỏi O_1O_2 bằng bao nhiêu thì độ lớn ảnh $A'B'$ không đổi khi AB tịnh tiến trước L_1.

Hướng dẫn giải : Khi chưa đặt L_2, sơ đồ tạo ảnh :



Theo đề bài :

$$d_1+d'_3 = d_1 + \frac{d_3f_3}{d_3-f_3} = AA' - O_1O_3 = 300(\text{cm});$$

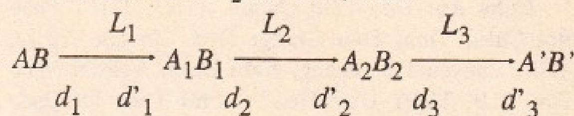
$$d_3 = O_1O_3 - d'_1 = 70 - \frac{d_1f_1}{d_1-f_1};$$

$$k = \frac{f_1}{f_1-d_1}\cdot\frac{f_3}{f_3-d_3} = 6$$

Suy ra : $f_1 = \dfrac{84d_1}{144+d_1}$; $d'_1 = \dfrac{84d_1}{60+d_1}$

$$f_3 = \frac{4200-14d_1}{74+d_1} \qquad (1)$$

Khi đặt thêm L_2, sơ đồ tạo ảnh



• Theo đề bài, khi $O_1O_2 = 36$cm, ảnh $A'B'$ không đổi $\Rightarrow L_2$ không có tác dụng trong hệ, nghĩa là $A_oB_o \equiv A_1B_1 \equiv A_2B_2 \Leftrightarrow d_2 = d'_2 = 0$; khi đó $d'_1 = O_1O_2 = 36$cm $\Rightarrow$ (theo (1))

$d_1 = 45\text{cm} \Rightarrow f_1 = 20\text{cm}; f_3 = 30\text{cm}.$

• Theo đề bài khi $O_1O_2 = 46$cm thì $d'_3 = \infty$ $\Rightarrow d_3 = f_3 = 30\text{cm}, \Rightarrow d'_2 = O_2O_3 - d_3 = 70 - 46 - 30 = -6(\text{cm});$

$d_2 = O_1O_2 - d'_1 = 10$ (cm)

$$\Rightarrow f_2 = \frac{d_2d'_2}{d_2+d'_2} = -15\ (\text{cm})\ ;$$

• Đặt $O_1O_2 = l$, ta có :

$$d'_1 = \frac{d_1f_1}{d_1-f_1} = \frac{20d_1}{d_1-20};$$

$$d_2 = l - d'_1 = \frac{ld_1 - 20l - 20d_1}{d_1-20};$$

$$d'_2 = \frac{d_2f_2}{d_2-f_2} = \frac{-15ld_1+300l+300d_1}{ld_1-5d_1-20l-300};$$

$$d_3 = l - d'_2\ ;\ d'_3 = \frac{d_3f_3}{d_3-f_3} \Rightarrow k = -\frac{d'_1d'_2d'_3}{d_1d_2d_3}$$

$$= \frac{900}{d_1(l^2-60l+500)+21000+800l-20l^2}$$

Để $A'B'$ có độ lớn không đổi, tức là k không đổi, khi vị trí AB thay đổi phải có :

$l^2 - 60l + 500 = 0$

$\Rightarrow l = 10$cm; hoặc $l = 50$cm.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Yên Bái : *Hoàng Anh Tài*, 11A3, *Phạm Hồng Chính*, 11A1, THPT chuyên Yên Bái; **Phú Yên:** *Lê Ngọc Thiên*, 11 Lí, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Nghệ An:** *Lê Ngọc Tuấn*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Tuyên Quang:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 11B2, THPT chuyên Tuyên Quang ; **Phú Thọ:** *Đặng Minh Sơn*, 11A7, THPT công nghiệp Việt Trì, *Vũ Quốc Huy*, 11B (chuyên lí), chuyên Hùng Vương ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Hiếu*, 12A, THPT Hồng Lĩnh, Hồng; Lĩnh; **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh*, 11 Toán, trường chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** *Trần Hoàng Thanh*, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Quảng Ngãi:** *Đặng Đình Thuận*, 11 Toán, chuyên Lê Khiết; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Vũ*, 11_7, THPT Trần Cao Vân, Tam Kì; **Quảng Bình:** *Dương Đức Anh*, 10 Lí, THPT NK Quảng Bình; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Thái Nguyên:** *Vũ Quốc Việt*, 10 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Sơn La:** *Nguyễn Thái Bình*, 11 Toán 3, THPT NK Sơn La; **Tp Hồ Chí Minh:** *Huỳnh Thiên Phúc*, 11T, PTNK ; **Đồng Nai:** *Trần Hữu Hoàng*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thế Cương*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc

MAI ANH

Đón đọc TẠP CHÍ TH&TT số 280

Tạp chí số 280 sẽ thông báo *kết quả cuộc thi Vui hè 2000*. Những bạn nào sẽ được giải thưởng ? Giới thiệu *đề thi tuyển sinh môn Toán của trường Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội năm 2000, đề thi Olympic toán THPT đồng bằng sông Cửu Long năm 1999, đề thi Olympic toán của Áo và Ba Lan.*

Ngoài ra các bạn còn được làm quen với *chữ kí điện tử* và được *giới thiệu về tập hợp mờ.*

Cùng với việc đón đọc TH&TT số 280, các bạn yêu thích có thể *đặt mua thêm Toán Tuổi thơ để đến với một sân chơi mới với nhiều điều bổ ích hoặc tặng một bạn nhỏ tuổi nào đó.*

Tháng 10 là đầu quý IV, rất nhiều bạn có thể quên đặt mua tạp chí đấy !

THTT

VỀ BỘ SÁCH... *(Tiếp trang 11)*

Bài toán *tiếp tuyến của một đường cong* trước đây có cách giải bằng cách dùng nghiệm kép của một phương trình, nhưng khi hàm số đã cho không phải là hàm số bậc hai thì cách làm ấy không có cơ sở về mặt lí thuyết, vậy sẽ *không cho phép sử dụng phương pháp nghiệm kép nữa* mà phải dùng phương pháp đạo hàm.

Phần nguyên hàm và tích phân được viết theo quan điểm coi *nguyên hàm như một công cụ để tính tích phân.* Điều đó có nghĩa là các phương pháp tính nguyên hàm sẽ không được nhấn mạnh và các công thức tính nguyên hàm sẽ có vai trò chủ yếu để tìm nguyên hàm. Việc dùng công thức Newton - Leibniz trong chương trình THPT để *định nghĩa tích phân xác định* tỏ ra thích hợp vì nó đơn giản, chỉ ra ngay cách tính, và hơn nữa, vì tất cả các hàm số được xét đến trong chương trình THPT đều liên tục và do đó, có nguyên hàm trong đoạn lấy tích phân. Bởi vậy, đối với mỗi tích phân cụ thể, giáo viên nên hướng dẫn cho học sinh *cách kiểm tra xem hàm số dưới dấu tích phân có liên tục trong đoạn lấy tích phân hay không.* Ngoài ra, cần chú ý rằng các *hàm số lượng giác ngược không còn có* trong chương trình nữa, nên tất nhiên sẽ không có các bài tập tính cách tích phân mà phải dùng đến chúng. Cuối cùng, các bài tập về bất đẳng thức tích phân sẽ *rất hạn chế* cả về số lượng bài tập lẫn mức độ yêu cầu; còn loại bài tập tính tổng vô hạn bằng phương pháp tích phân thì bị *loại bỏ hoàn toàn.*

VỀ HÌNH HỌC.

Hình học 10 Vận dụng vectơ để giải toán hình học là một nội dung rất hay, có tính rèn luyện tư duy tốt, nhưng cũng rất khó và mất nhiều thời gian, do đó trong sách mới không đề cao yêu cầu này. Vectơ trong HH10 có vai trò là đối tượng nghiên cứu nhiều hơn là công cụ nghiên cứu. Nói khác đi, các bài tập về dùng vectơ để giải toán hình học sẽ chỉ *còn rất hạn chế.*

Vấn đề vận dụng các hệ thức lượng trong các hình để giải tam giác và giải các bài toán thực tế được *coi trọng hơn* nhằm tăng cường những yếu tố thực hành. Yêu cầu về các phép biến hình trong mặt phẳng, một vấn đề khó không những đối với người học mà còn đối với cả người dạy, là không đi sâu vào các vấn đề quá trừu tượng mà *đi thẳng vào* các phép biến hình cụ thể, *bỏ qua* khái niệm tích các phép biến hình tuy có nói tới việc thực hiện liên tiếp hai phép biến hình. Các bài tập cũng *chỉ tập trung vào việc* nhận biết các phép biến hình mà *không yêu cầu cao* về vận dụng biến hình trong giải toán hình học.

Hình học 11 được dành cho hình không gian, nghiên cứu theo phương pháp truyền thống. Hình học không gian được xây dựng theo phương châm *đơn giản, cơ bản* và *tăng cường các yếu tố thực hành.* Để làm điều đó, trong sách chỉ nêu 4 tiên đề thay việc nêu 6 tiên đề như trước đây. Để tránh những rắc rối cho học sinh khi mới làm quen với hình học không gian, đã *không đưa ra* các quy ước về dựng hình trong không gian và thuật ngữ *dựng thiết diện* được thay thế bởi thuật ngữ đúng hơn là *xác định thiết diện.*

Với việc *giới thiệu định lí Talet* như một bài tập, khá nhiều *bài tập khó bị loại bỏ*, nhất là một số bài tập về quỹ tích.

Hình đa diện và khối đa diện cũng được giới thiệu *khá đơn giản*, thể hiện trong việc xây dựng khái niệm và công thức tính thể tích của các khối đa diện; chỉ chứng minh công thức tính thể tích của khối hộp chữ nhật với các kích thước nguyên dương, từ đó suy ra hoặc thừa nhận các công thức khác. Điều quan trọng là học sinh *phải nhớ và biết cách vận dụng* các công thức ấy vào giải các bài tập cụ thể.

Các hình tròn xoay và khối tròn xoay cũng được giới thiệu trên tinh thần *đơn giản dễ sử dụng. Phương pháp khai triển* mặt xung quanh của hình trụ và hình nón cũng *được sử dụng* để minh họa cho công thức tính diện tích xung quanh của chúng.

c) **Hình học 12** gồm hai phần : phương pháp tọa độ phẳng và phương pháp tọa độ trong không gian.

Do sự tương tự như trong hình học phẳng, vấn đề vectơ trong không gian chỉ được *giới thiệu một cách sơ lược* với mục đích phục vụ cho phương pháp tọa độ trong không gian nên không tách thành một chương riêng mà gắn liền với phần phương pháp tọa độ trong không gian. Việc sử dụng vectơ để giải toán hình học không gian cũng *không yêu cầu cao* như trước đây. Vấn đề định thức cấp ba và khái niệm tích hỗn tạp của ba vectơ cũng *bị loại bỏ.*

Trong phần phương pháp tọa độ phẳng, định lí về điều kiện để một đường thẳng tiếp xúc với một elip, một hypebol hay một parabol trước đây chưa được chú ý, nay được *phát biểu* và *chứng minh chặt chẽ làm cơ sở* cho học sinh vận dụng vào bài tập. Trong khi đó, một số công thức phức tạp của phương pháp tọa độ trong không gian thì *được tinh giản* ; chẳng hạn như các công thức dạng định thức của : điều kiện để ba vectơ đồng phẳng, diện tích tam giác, khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, khoảng cách giữa hai đường chéo nhau. Tuy nhiên các công thức này vẫn được giới thiệu ở dạng khác, đơn giản và dễ vận dụng hơn.

Nói chung SGKTCLHN sẽ đáp ứng được các yêu cầu về kiến thức, kĩ năng cho học sinh THPT những năm tới trước khi có sách thí điểm trung học phân ban mới.



GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Chúc mừng tất cả các bạn nhân dịp năm học mới ! May mắn lần này đến với các bạn sinh **ngày 9 tháng 10**.

1) *Trương Thị Mây*, năm sinh ?, lớp 11B3, trường THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn, Hải Dương.

2) *Nguyễn Thanh Tùng*, sinh năm 1985, 423, Trần Nhân Tông, Kiến An, Hải Phòng.

3) *Hoàng Nguyên Bảo Trâm*, sinh năm 1984, 195, Trần Hưng Đạo, thị xã Kon Tum, Kon Tum.

4) *Nguyễn Văn Ánh*, sinh năm 1982, lớp 12A1, THPT Xuân Mai, Chương Mỹ, Hà Tây.

5) *Phạm Dũng*, sinh năm 1983, lớp 11F, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ

6) *Nguyễn An Quý*, sinh năm 1985, 16 Nguyễn Khuyến, Ngô Quyền, Hải Phòng

7) *Đinh Ngọc Thắng*, sinh năm 1985, 9A, THCS Dân lập Châu Phong, Xuân Hòa, Mê Linh, Vĩnh Phúc

Các bạn thích ngày sinh này là :

1) *Nguyễn Văn Dũng*, 12A4, THPTCB Đan Phượng, Hà Tây.

2) *Đặng Tiến Cường*, Đồng Tiến, Phượng Dực, Phú Xuyên, Hà Tây.

3) *Phan Nguyễn Minh Luân*, 9A, THPT Bến Tre (03, đường 3-2, phường II, Bến Tre).

4) *Thân Thị Nguyệt Ánh*, Sở Công Nghiệp Bắc Giang.

5) *Trần Huy Kiên*, 10A3, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn, Hải Dương.

6) *Nguyễn Thị Kiều Trang*, số 8, nhà H, tập thể Trần Hưng Đạo, phường Đồng Nhân, quận Hai Bà Trưng, Hà Nội.

7) *Nguyễn Xuân Viên*, 12E, THPT Hoằng Hóa 2, Thanh Hóa.

8) *Phạm Minh Lộc*, 77A Lê Hồng Phong, Nam Định.

Xin chúc mừng các bạn. Nếu địa chỉ của các bạn thay đổi xin báo gấp với Câu lạc bộ để quà gửi không bị thất lạc. Các hội viên của CLB lại chờ đợi tiếp nhé ! Cảm ơn.

CLB

GIỎI VÀ KÉM BÊN NHAU

Người ta yêu cầu 110 học sinh đứng thành một vòng tròn, trong đó có 11 học sinh giỏi và 5 học giỏi kém.

Biết rằng số học sinh đứng giữa 2 học sinh kém là bằng nhau và số học sinh đứng giữa 2 học sinh giỏi cũng bằng nhau. Chứng minh : có ít nhất 1 bạn học sinh kém đứng bên cạnh 1 bạn học sinh giỏi.

NGỌC MAI

TẠI SAO LẠI THẾ ?

Chưa bao giờ lại có một số lượng lớn *các bác sĩ* tham gia *chẩn đoán bệnh* đến thế ! Các bác sĩ cấp THCS hình như gần gũi với căn bệnh này hơn. Sai lầm của lời giải chính là ở lập luận "A đạt giá trị lớn nhất thì $(x+1)^2 - 4$ đạt giá trị nhỏ nhất". Điều này chỉ đúng khi tử và mẫu của A cùng dương mà tử là hằng số như $A = \frac{1}{x^2+2x+3}$. Một số bạn nhận xét đúng là $A = \frac{1}{x^2+2x-3}$ không có giá trị lớn nhất. Các bạn THPT có thể thấy $\lim_{x\to 1^+} A = +\infty$. Các bạn THCS có thể thấy khi $x = 1 + \alpha$ với $\alpha > 0$ thì $A = \frac{1}{\alpha^2+4\alpha}$ nên α càng nhỏ thì A càng lớn và lớn hơn bao nhiêu cũng được (!).

Các bạn chẩn đoán tốt và gửi bài về sớm hơn là : *Phùng Văn Doanh*, 11 Toán - Tin, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định, *Nguyễn Hồ Hoài Đức*, thị trấn Thái Lão, Hưng Nguyên, Nghệ An; *Phạm Thành Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Hải Dương, *Phan Trung Kiên*, 9A, THCS thị trấn Nam Đàn, Nghệ An; *Lê Văn Dũng*, 10A5, THPT Chương Mỹ A, Hà Tây; *Nguyễn Xuân Trường*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; *Đinh Hải Yến*, số 6, Trần Huỳnh, phường 7, thị xã Bạc Liêu, Bạc Liêu; *Nguyễn Thanh Tuấn*, 9 THPT Lê Quý Đôn, Điện Biên, Lai Châu; *Nguyễn Hữu Hùng*, lớp 10/5, Quốc học Huế, *Đặng Ngọc Quang*, 9B, THCS Tô Hiệu, Vĩnh Phúc, *Trương Đình Bảo*, 493/59B, CMT8, P13, Q10, Tp Hồ Chí Minh

KIHIVI

PHƯƠNG TRÌNH VÔ NGHIỆM ?

Một bài toán khá quen thuộc và đã từng nhắc tới ở mục "Trả lời bạn đọc", nhưng một bạn của tôi lại mới có một lời giải mới mà kết quả lại mâu thuẫn với lời giải đúng. Đó là bài toán : "Giải phương trình $\log_2\log_3 x = \log_3\log_2 x$". Lời giải đó như sau :

Điều kiện : $\log_2 x > 0$; $\log_3 x > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Vậy phương trình tương đương với

$$x^{\log_2\log_3 x} = x^{\log_3\log_2 x} \Leftrightarrow \left(\log_3 x\right)^{\log_2 x} = \left(\log_2 x\right)^{\log_3 x}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = \log_2 x$$

$\Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn điều kiện trên. Vậy phương trình vô nghiệm.

Các bạn có thể xem giúp : lời giải của bạn tôi sai ở đâu không ?

NGUYỄN KIM THANH
11B Toán - ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội



Giải đáp bài

TRÒ CHƠI THÁNG 7

Vì tổng các số trong bảng là 496 nên theo yêu cầu mỗi miền cần có tổng các số là 248 và chứa 21 ô. Mặt khác vì hai miền phải trùng khít nên đường gấp khúc phải luôn đi qua đoạn AB. Cũng do tính chất trên nên đường gấp khúc hoặc có một đoạn là AB, hoặc có một đoạn là CD, hoặc có một đoạn là EF (riêng đoạn GH không thỏa mãn vì chia đôi hình 6 × 7 nhưng tổng 2 miền không bằng nhau).

G E C A B D F H

Từ 1 cách chia, thay đổi một vài ô trống ta có thể suy ra nhiều cách chia khác. Các bạn tự tìm sẽ thấy rất nhiều đáp án. Dưới đây là một vài cách chia :

1) Chứa 1 đoạn là AB.

					1	**2**
3	4	5	6	7	**8**	**9**
10	11	**12**	13	14	**15**	16
17	18	**19**	**20**	21	**22**	23
24	25	**26**	**27**	**28**	**29**	30
31						

					1	2
3	4	**5**	**6**	7	**8**	9
10	11	**12**	13	14	**15**	16
17	18	**19**	**20**	21	**22**	23
24	25	**26**	27	28	**29**	30
31						

					1	**2**
3	**4**	**5**	6	7	8	**9**
10	**11**	**12**	13	14	15	**16**
17	**18**	**19**	**20**	21	22	**23**
24	**25**	**26**	**27**	28	29	**30**
31						

					1	**2**
3	4	**5**	6	**7**	**8**	**9**
10	11	**12**	13	14	15	**16**
17	**18**	**19**	**20**	21	**22**	**23**
24	25	26	**27**	28	**29**	**30**
31						

2) Chứa 1 đoạn là CD :

					1	**2**
3	**4**	**5**	6	7	**8**	**9**
10	11	12	13	14	**15**	**16**
17	18	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
24	25	**26**	**27**	28	29	**30**
31						

3) Chứa 1 đoạn là EF

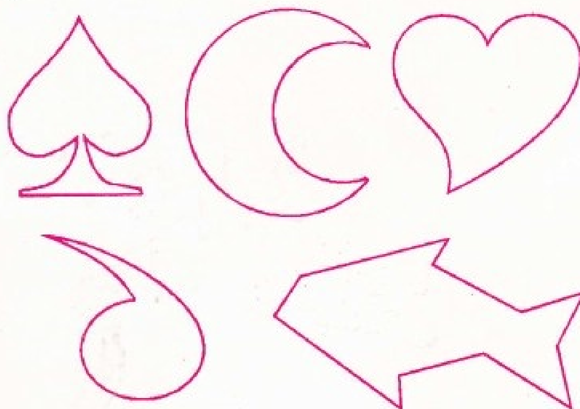
					1	2
3	**4**	5	6	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
17	18	19	20	21	22	**23**
24	25	26	**27**	**28**	29	**30**
31						

Các bạn có nhiều cách chia là : *Hà Thị Nhã Phương*, Chu Hóa, Lâm Thao, **Phú Thọ**, *Trần Kiên Trung*, 283 Nguyễn Văn Cừ, Vinh, *Hà Thị Huyền*, 7B, THCS thị trấn, Nam Đàn, *Phan Thị Mai*, 11E, THPT Nam Đàn I, *Nguyễn Đăng Tài*, 9C, THCS thị trấn Nam Đàn, **Nghệ An**, *Nguyễn Vĩnh Xuân Thanh*, 47 Thủ Khoa Huân, PII, Gò Công, **Tiền Giang**.

BÍNH NAM HÀ

THỬ TÀI ƯỚC LƯỢNG

Ước lượng diện tích các hình sau đây (theo cm^2, cho kết quả đến 2 chữ số thập phân).



THANH THÀNH



Người bạn mới

Một tháng nữa... TOÁN TUỔI THƠ - người em của TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ sẽ ra đời. TOÁN TUỔI THƠ sẽ đến với các bạn học sinh, các thầy giáo, cô giáo ở các trường Tiểu học và các vị phụ huynh có quan tâm tới sự phát triển trí tuệ ngay từ thời thơ ấu của con em mình. TOÁN TUỔI THƠ, với khuôn khổ xinh xắn gồm 4 trang bìa và 32 trang ruột in đẹp, vừa là sân chơi trí tuệ, hấp dẫn cho các bạn học sinh, vừa là tư liệu bổ ích cho các thầy giáo, cô giáo và các vị phụ huynh. TOÁN TUỔI THƠ là món ăn tinh thần trong mọi gia đình mà ai cũng có thể tìm thấy những điều lí thú.

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ từng là bạn đồng hành của các bạn THCS, THPT trong suốt 36 năm qua. TOÁN TUỔI THƠ cũng hi vọng trở thành người bạn thân thiết ở các mái trường Tiểu học.

TOÁN TUỔI THƠ mong rằng mỗi bạn đọc của TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ hãy giới thiệu những người bạn mới cho TOÁN TUỔI THƠ. Các bạn hãy truyền những thông tin này tới các đối tượng mà TOÁN TUỔI THƠ sẽ hướng tới. Ngay dưới đây là 5 bài toán đầu tiên của TOÁN TUỔI THƠ dành cho học sinh Tiểu học. Các bạn hãy giới thiệu cho các em học sinh Tiểu học tham gia giải và gửi lời giải về tòa soạn theo địa chỉ : Toán Tuổi thơ, 57 Giảng Võ, Hà Nội. Ở mỗi lời giải, các bạn hướng dẫn các em ghi rõ : họ và tên, lớp, trường cùng địa phương.

TOÁN TUỔI THƠ ra số đầu tiên vào ngày 25 tháng 10 năm 2000 sẽ khen thưởng các em có lời giải tốt cho 5 bài toán dưới đây (không nhất thiết giải cả 5 bài).

Hãy đặt mua TOÁN TUỔI THƠ tại các trường Tiểu học hoặc các cơ sở Bưu điện gần nhất ngay từ bây giờ ! Năm 2000, TOÁN TUỔI THƠ sẽ ra 2 số vào 25 tháng 10 và 25 tháng 12 (giá mỗi số 2.500đ). Các đơn vị : Nhà trường, Phòng Giáo dục, Sở Giáo dục và Đào tạo nếu có ý định nhận phát hành TOÁN TUỔI THƠ xin liên hệ trực tiếp với Tòa soạn theo địa chỉ trên hoặc qua điện thoại để biết thêm các thông tin.

TOÁN TUỔI THƠ chúc các bạn vui khỏe và hẹn ngày ra mắt các bạn.



Thi giải Toán QUA THƯ

Bài 1. Bạn có thể cắt một tờ giấy hình tam giác thành ba phần và ghép ba phần này (không chồng lên nhau) để có một hình chữ nhật được không ?

ANPHA

Bài 2 : Hãy dùng các số từ 1 đến 16, mỗi số chỉ dùng một lần để ghi vào mỗi ô của băng giấy dưới đây một số, sao cho tổng 2 số ghi ở hai ô cạnh nhau đều là kết quả của phép nhân hai số tự nhiên giống nhau.

LTN

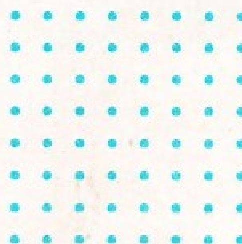
Bài 3. Hãy điền vào mỗi tam giác còn trống một trong các chữ cái T, O, A, N, V, U, I sao cho trong bất cứ 2 tam giác có cạnh chung không có chữ cái giống nhau.



NGỌC MAI

Bài 4. 5 con mèo trong 5 phút bắt được 5 con chuột. Vậy muốn bắt được 10 con chuột trong 10 phút thì cần bao nhiêu con mèo ?

TÔN THÂN



Bài 5. Hãy vẽ đường gấp khúc khép kín gồm 16 đoạn thẳng đi qua 64 điểm trong hình bên mà đi qua mỗi điểm đúng một lần.

PHI PHI

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT81M0

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2000

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng